École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Prof. Eisenbrand

Lineare Algebra (Herbst 2014)

Übung 3

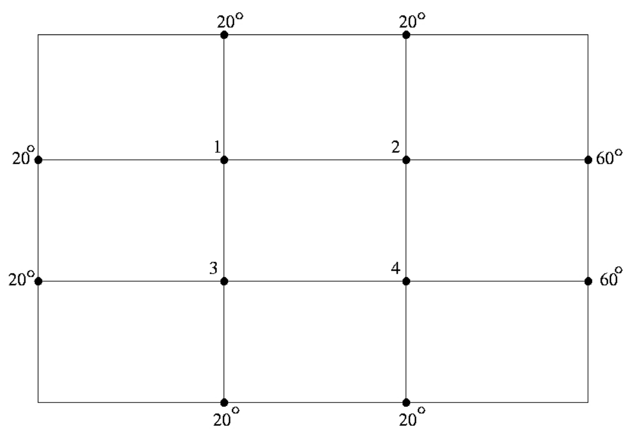
Abgabe bis **06.10.2014** um 11 Uhr in Box vor MA C1 573.

Aufgabennummern beziehen sich auf Ausgabe: David C. Lay: Linear Algebra and its Applications. Fourth international Edition (Pearson).

Wir empfehlen zusätzlich die Übungen mit ungerader Nummer im behandelten Kapitel des Lehrbuches. Lösungen hierzu finden sich am Ende des Buches.

Aufgabe 1

Wir betrachten ein Wärmeübertragungsproblem, in dem man für eine dünne Metallplatte die Temperatur im Gleichgewichtszustand bestimmen möchte, wenn die Temperaturen an den Rändern bekannt sind. Wir beschränken uns darauf die Temperaturen an den auf der Abbildung eingezeichneten Knotenpunkten zu berechnen.



Seien T_1, T_2, T_3 und T_4 die zu bestimmenden Temperaturen der inneren vier Knotenpunkte und nehmen Sie an, dass die Temperatur eines Knoten durch das arithmetische Mittel der Temperaturen an den vier Nachbarknoten (oben, links, unten, rechts) gegeben ist. Beispielsweise gilt für den ersten Knoten

$$T_1 = (20 + 20 + T_3 + T_2)/4.$$

- Geben Sie ein lineares Gleichungssystem an, dessen Lösung die Temperaturen T_1, T_2, T_3 und T_4 an den Knoten 1, 2, 3 und 4 bestimmt.
- Bestimmen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix des Systems.
- Lösen Sie das GLS.

Lösung: Wir erhalten das lineare Gleichungssystem

$$4T_1 - T_2 - T_3 = 40 \quad (1)$$
$$-T_1 + 4T_2 - T_4 = 80 \quad (2)$$
$$-T_1 + 4T_3 - T_4 = 40 \quad (3)$$
$$-T_2 - T_3 + 4T_4 = 80 \quad (4)$$

Auf dem üblichen Weg (red. ZSF) finden wir die Lösung $T_1 = 25$, $T_2 = 35$, $T_3 = 25$ und $T_4 = 35$.

Aufgabe 2

1. Sind die Vektoren
$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$
linear abhängig?

2. Sind die Spalten der Matrix
$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & 10 & -7 & 1 \\ -5 & -5 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$
linear unabhängig?

3. Gegeben die Vektoren
$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ h \end{bmatrix}$$
für welche Werte von h gilt $\boldsymbol{v}_3 \in \operatorname{Span}\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$? Für welche Werte von h ist die Menge $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ linear abhängig?

Lösung:

1. Wir erhalten
$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
Die Vektoren $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ und $\boldsymbol{u}_3$ sind also nicht linear abhängig, da die Matrix in Zeilenstufenform in jeder Spalte ein Pivotelement enthält.

2. Die Matrix $\boldsymbol{M}$ hat mehr Spalten als Zeilen. Ihre Zeilenstufenform kann sie also nicht in jeder Spalte ein Pivotelement besitzen. Für das homogene Gleichungssystem $\boldsymbol{M}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ gibt es also eine freie Variable und nichttriviale Lösungen. Daher sind die Spalten von $\boldsymbol{M}$ linear abhängig.

3. Man sieht, dass $\boldsymbol{v}_1$ ein Vielfaches von $\boldsymbol{v}_2$ ist. Man erhält
$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & h+2 \end{bmatrix}$$
   - Die zweite Zeile zeigt, dass für jeden Wert von h das System $\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_3$ unlösbar ist und daher kann nicht $\boldsymbol{v}_3 \in \operatorname{Span}\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ gelten.
   - Für jeden Wert von h sind die Vektoren $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ und $\boldsymbol{v}_3$ linear abhängig, da es in der zweiten Spalte der erweiterten Koeffizientenmatix kein Pivotelement gibt.

Aufgabe 3

Seien $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ drei Vektoren im $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie die folgende Äquivalenz:
$\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ ist linear unabhängig genau dann wenn $\{\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v} + 2\boldsymbol{w}, 2\boldsymbol{u} + 4\boldsymbol{v} + 5\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v} + 5\boldsymbol{w}\}$ linear unabhängig ist.

Lösung: Wir definieren $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v} + 2\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{y} = 2\boldsymbol{u} + 4\boldsymbol{v} + 5\boldsymbol{w}$ und $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v} + 5\boldsymbol{w}$.
$\Rightarrow$ Wenn $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ linear unabhängig ist, dann ist auch $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$ linear unabhängig.

Seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, so dass $\alpha_1\boldsymbol{x} + \alpha_2\boldsymbol{y} + \alpha_3\boldsymbol{z} = 0$. Wir zeigen nun, dass $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ gilt.

Per Definition von $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ erhalten wir

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3)\boldsymbol{u} + (2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3)\boldsymbol{v} + (2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 5\alpha_3)\boldsymbol{w} = 0$$

.
Da $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ linear unabhängig ist, muss

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 5\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

gelten.
Dieses homogene GLS hat nur die triviale Lösung $(0, 0, 0)$ und damit ist $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$ linear unabhängig.

$\Leftarrow$ Zeigen wir nun die Umkehrung: Wenn $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$ linear unabhängig ist, dann ist auch $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ linear unabhängig.

Drücken wir zunächst $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ in Abhängigkeit von $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ und $\boldsymbol{z}$ aus.
Es gilt

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v} + 2\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{y} &= 2\boldsymbol{u} + 4\boldsymbol{v} + 5\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{z} &= \boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v} + 5\boldsymbol{w} \end{aligned}$$

und durch Lösen dieses GLS mit den Unbekannten $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ und $\boldsymbol{z}$ sowie Variablen $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ erhalten wir daher

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= -5\boldsymbol{x} + 4\boldsymbol{y} - 2\boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{v} &= 5\boldsymbol{x} - 3\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{w} &= -2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \end{aligned}$$

Seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, so dass $\alpha_1\boldsymbol{u} + \alpha_2\boldsymbol{v} + \alpha_3\boldsymbol{w} = 0$. Wir zeigen nun, dass $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ gilt.
Nach Definition haben wir

$$\alpha_1(-5\boldsymbol{x} + 4\boldsymbol{y} - 2\boldsymbol{z}) + \alpha_2(5\boldsymbol{x} - 3\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) + \alpha_3(-2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = 0$$

und daraus folgt

$$(-5\alpha_1 + 5\alpha_2 - 2\alpha_3)\boldsymbol{x} + (4\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3)\boldsymbol{y} + (-\alpha_1 + 2\alpha_2)\boldsymbol{z} = 0.$$

Da nun $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$ linear unabhängig ist, muss

$$\begin{aligned} -5\alpha_1 + 5\alpha_2 - 2\alpha_3 &= 0 \\ 4\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

Dieses homogene GLS hat nur die triviale Lösung und daher ist $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ linear unabhängig.

Aufgabe 4

Welche der folgenden Abbildungen ist linear? Begründen Sie Ihre Antwort.

- $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x + 3y \\ 5x - y \end{bmatrix}$
- $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + y - 1 \\ x - y \end{bmatrix}$
- $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = 2x - y$
- $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x - y \\ 4x + 5y \\ 1 \end{bmatrix}$
- $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, \boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x + 3y \\ 5x - y \\ x + 2y \\ 3x - 4y \end{bmatrix}$

Lösung:

- Ja. Wir rechnen die beiden Eigenschaften nach:

  1) $T(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v})$ für alle $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$.
  Es gilt

  $$\begin{aligned} T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v}) &= \begin{bmatrix} 2u_1 + 3u_2 \\ 5u_1 - u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2v_1 + 3v_2 \\ 5v_1 - v_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2u_1 + 3u_2 + 2v_1 + 3v_2 \\ 5u_1 - u_2 + 5v_1 - v_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2(u_1 + v_1) + 3(u_2 + v_2) \\ 5(u_1 + v_1) - (u_2 + v_2) \end{bmatrix} = T(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \end{aligned}$$

  2) $T(\alpha \boldsymbol{u}) = \alpha T(\boldsymbol{u})$ für alle $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.
  Es gilt

  $$\begin{aligned} T(\alpha \boldsymbol{u}) &= \begin{bmatrix} 2\alpha u_1 + 3\alpha u_2 \\ 5\alpha u_1 - \alpha u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(2u_1 + 3u_2) \\ \alpha(5u_1 - u_2) \end{bmatrix} \\ &= \alpha \begin{bmatrix} 2u_1 + 3u_2 \\ 5u_1 - u_2 \end{bmatrix} = \alpha T(\boldsymbol{u}) \end{aligned}$$

  Alternativ kann man natürlich auch feststellen, dass $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ gilt für $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$. Daher ist T offensichtlich linear.

- Nein, da $T(\boldsymbol{0}) \neq \boldsymbol{0}$.
- Ja. Nachrechnen wie im ersten Beispiel.
- Nein, da $T(\boldsymbol{0}) \neq \boldsymbol{0}$.
- Ja. Nachrechnen wie im ersten Beispiel.

Wahr/Falsch
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind und begründen Sie Ihre Antwort.
Kapitel 1.7

1. Die Spalten einer Matrix $\boldsymbol{A}$ sind linear unabhängig wenn die Matrixgleichung $\boldsymbol{A}x = 0$ nur die triviale Lösung hat.
2. Wenn eine Menge von Vektoren linear abhängig ist, dann ist jeder Vektor eine Linearkombination der übrigen Vektoren in der Menge.
3. Die Spalten einer beliebigen 4×5 Matrix sind immer linear abhängig.
4. Wenn drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ in derselben Ebene liegen, dann sind sie linear abhängig.
5. Wenn eine Menge von Vektoren im $\mathbb{R}^n$ linear abhängig ist, enthält sie mehr als n Vektoren.
6. Seien $v_1, \ldots, v_4 \in \mathbb{R}^4$ linear abhängig. Dann ist v_1, v_2, v_3 auch linear abhängig.
7. Seien $v_1, \ldots, v_4 \in \mathbb{R}^4$ linear unabhängig. Dann ist v_1, v_2, v_3 auch linear unabhängig.
8. Seien $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ und v_2 kein Vielfaches von v_1. Dann ist $\{v_1, v_2\}$ linear unabhängig.

Kapitel 1.8

1. Sei $\boldsymbol{A}$ eine 3×5 Matrix und $T(x) = Ax$ eine lineare Abbildung. Dann ist die Definitionsmenge von T der Raum $\mathbb{R}^3$.
2. Eine Abbildung T ist linear genau dann wenn $T(c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_1}) = c_1T(\boldsymbol{v_1}) + c_2T(\boldsymbol{v_2})$ gilt für alle $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}$ im Definitionsbereich von T und alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
3. Für eine lineare Abbildung T gilt immer $T(0) = 0$.

Kapitel 1.9

1. Wenn zwei lineare Transformationen hintereinander ausgeführt werden, ist diese Kombination nicht unbedingt eine lineare Abbildung.
2. Sei $\boldsymbol{A}$ eine 3×2 Matrix. Dann ist die Abbildung $T(x) = Ax$ nicht injektiv.
3. Eine Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ist bijektiv genau dann wenn jeder Vektor im $\mathbb{R}^n$ das Bild von genau einem Vektor im $\mathbb{R}^n$ ist.

Lösung:

1. W
2. F
3. W
4. W
5. F
6. F
7. W

8. F

Kapitel 1.8

1. F
2. W
3. W

Kapitel 1.9

1. F
2. F
3. W