Algèbre linéaire avancée II
printemps 2018

Série 7 - Corrigé

Exercice 1. Soit $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ des matrices symétriques dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. Montrer que toutes les valeurs propres de la matrice $A + B$ sont aussi strictement positives.

Solution. *Comme A et B ont seulement les valeurs propres positives, les formes quadratiques $Q_A(x)$ et $Q_B(x)$ définies par $Q_A(x) = x^T Ax$ et $Q_B(x) = x^T Bx$ sont définies positives. Maintenant, soit Q_{A+B} définie par $Q_{A+B}(x) = x^T(A + B)x$. Alors $Q_{A+B}(x) = Q_A(x) + Q_B(x) > 0$ pour tous vecteurs x non nul, donc Q_{A+B} est une forme définie positive, et ça signifie que la matrice $A + B$ posséde seulement des valeurs propres positives.*

Exercice 2. Pour chaque forme suivante Q, décider si Q est définie positive, définie négative ou indéfinie. Si Q est indéfinie, trouver un vecteur x tel que $Q(x) > 0$ et un vecteur y tel que $Q(y) < 0$.

a) $Q(x) = 13x_1^2 + 8x_1x_2 + 7x_2^2$

b) $Q(x) = 11x_1^2 + 16x_1x_2 - x_2^2$

Solution. *a) On a que $Q(x) = x^T Ax$ où $A = \begin{pmatrix} 13 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$. L'équation charactéristique de A est*

$$0 = \det(A - \lambda I) = (13 - \lambda)(7 - \lambda) - 16 = \lambda^2 - 20\lambda + 75 = (\lambda - 15)(\lambda - 5)$$

ainsi les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 15$ et $\lambda_2 = 5$. Car tous les valeurs propres de A sont positifs, A est définie positive, et donc la forme quadratique Q est définie positive.

b) Similairement, $Q(x) = x^T Ax$ où $A = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$. Comme dans a), on trouve que l'équation charactéristique de A est

$$0 = \det(A - \lambda I) = (11 - \lambda)(-1 - \lambda) - 64 = \lambda^2 - 10\lambda - 75 = (\lambda - 15)(\lambda + 5)$$

et les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 15$ et $\lambda_2 = -5$. Cela signifie que A et $Q(x)$ sont indéfinies. Pour trouver les vecteurs x et y qui satisfont $Q(x) > 0$ et $Q(y) < 0$, on cherche les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres λ_1 et λ_2. On trouve

$x = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ *et* $y = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$. *Finalement, on vérifie que* x *et* y *sont les vecteurs satisfaisant:*

$$Q(x) = x^T Ax = \begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11 & 8\\8 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{30}{\sqrt{5}}\\\frac{15}{\sqrt{5}}\end{pmatrix} = 15 > 0$$

et similairement

$$Q(y) = y^T Ay = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11 & 8\\8 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\\frac{-2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{-5}{\sqrt{5}}\\\frac{10}{\sqrt{5}}\end{pmatrix} = -5 < 0.$$

Exercice 3. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique. Montrer que A est semi-définie positive si et seulement si tous ses mineurs symétriques sont non négatifs, c'est-à-dire $\det(B_K) \geq 0$ pour tout $K \subseteq \{1, \ldots, n\}$.
Rappel: Soit $K = \{l_1, \ldots, l_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ où $1 \leq l_1 < l_2 < \cdots < l_k \leq n$. La matrice $B_K \in \mathbb{R}^{k\times k}$ est la matrice $(B_K)_{ij} = A_{l_i l_j}, 1 \leq i, j \leq k$.

Solution. $\Rightarrow$ *Soit* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *une matrice symétrique semi-définie positive. Soit* $K = \{l_1, \ldots, l_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ *où* $l_1 < l_2 < \cdots < l_k$. *On va montrer que* B_K *est semi-définie positif, ainsi tous les valeurs propres de* B_K *son non-négatifs et* $det(B_K) \geq 0$.
Soit $f : \mathbb{R}^{|K|} \to \mathbb{R}^n$ *tel que* $f(y)_{l_j} = y_j$ *et* $f(y)_i = 0$ *si* $i \notin K$. *Ainsi, un vecteur* $f(x)$ *est obtenu de* x *par écrivant* y_i *sur la position* l_i *et zéros ailleurs. On note que si* $y \in \mathbb{R}^{|K|}$, *alors* $y^T B_K y = f(y)^T A f(y) \geq 0$ *(vérifier!). Donc* B_K *est semi-définie positive et* $\det(B_K) \geq 0$.

$\Leftarrow$ *On montre maintenant l'autre sens en prouvant la contraposée par induction sur la taille de* A. *C'est-à-dire, on montre que* A *n'est pas semi-définie positive implique que* $\det(B_K) < 0$ *pour un ensemble d'indices* K.
Initialisation: Si $A = (a)$, *alors* $a < 0$ *car* A *n'est pas semi-définie positive. Ainsi* $\det(A) < 0$ *et on a un mineur symétrique* A *tel que* $\det(A) < 0$.
Induction: On suppose que la déclaration est vrai pour toute matrice B *de taille* $n-1$, *et on montre que elle est vrai pour* A *de taille* n.

Soit A *une matrice symétrique de taille* n *pas semi-définie positive. Comme* A *n'est pas semi-définie positive, il y a au moins une valeur propre négative. Soit* v *un vecteur normalisé tel que* $Av = \lambda v$, *avec* $\lambda < 0$. *Si* λ *est la seule valeur propre* ≤ 0 *de* A *alors on a que* $\det(A) < 0$, *ainsi on a montré qu'il existe un mineur symétrique de* A *tel que* $\det(B_K) < 0$ *(en l'occurrence* $B_K = A$*). Si* λ *n'est pas la seule valeur propre* < 0 *alors il existe* $\mu \leq 0$ *et un vecteur* u *de norme* 1 *orthogonal à* v, *qui est le vecteur propre correspondant à la valeur propre* μ. *On prend alors* $w = v + su$, *avec* $s \in \mathbb{R}$ *de sorte á avoir au moins une coordonnée égale à zéro, par exemple,* $w_i = 0$. *On choisit alors* A_{-i} *la sous-matrice de* A *obtenue en enlevant la colonne et la ligne* i. *On note* w_{-i} *le vecteur obtenu de* w *en enlevant la coordonne* i. *Alors,*

$$w_{-i}^T A_{-i} w_{-i} = w^T A w = \lambda + s^2\mu < 0.$$

Ainsi A_{-i} *n'est pas semi-définie positive. Par l'hypothése de récurrence, qu'il existe un ensemble d'indices* K *tel que* $\det(A'_K) < 0$, *alors il existe un mineur sym etrique de* A *négatif.*

Exercice 4. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique.

a) Montrer que A est définie négative, si et seulement si $(-1)^k \det(B_k) > 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.

b) Montrer que A est semi-définie négative, si et seulement si $(-1)^{|K|} \det(B_K) \geq 0$ pour tout $K \subseteq \{1, \dots, n\}$.

Solution. *a) D'abord, on note que A est définie négative si et seulement si la matrice $-A$ est définie positive. C'est parce que pour tout x non nul $x^T Ax < 0$ si et seulement si $x^T(-A)x > 0$.*

Par Théorème 2.10, $(-A)$ est définie positive si et seulement si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs, c'est-à-dire $\det(-B_k) > 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ où $(-B_k)_{ij} = -A_{ij}$, $1 \leq i, j, \leq k$. Cependant, par les propriétés basiques du déterminant, $\det(-B_k) = (-1)^k \det(B_k)$ parce que B_k est une matrice avec la dimension $k \times k$. On conclut que A est définie négative si et seulement si $(-1)^k \det(B_k) \geq 0$ pout tout $k \in \{1, \dots, n\}$.

b) Comme dans partie a), A est semi-définie négative si et seulement si la matrice $-A$ est semi-définie positive. Par Exercice 4, on voit que $(-A)$ est semi-définie positive si et seulement si pout tout $K = \{l_1, \dots, l_k\}$ où $1 \leq l_1 < \cdots < l_k \leq n$ on a que $\det(-B_K) \geq 0$ où $(-B_K)_{ij} = (-A)_{l_i l_j}$, $1 \leq i, j, \leq k$. Comme $\det(-B_K) = (-1)^{|K|} \det(B_K)$, on conclut que A est semi-définie négative si et seulement si $(-1)^{|K|} \det(B_K) \geq 0$ pout tout $K \subseteq \{1, \dots, n\}$.

Exercice 5. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique et $f(x) = x^T Ax$ la forme quadratique correspondante à A. Montrer que

$$\max_{x \in S^{n-1}} f(x) = \lambda_1 \text{ et } \min_{x \in S^{n-1}} f(x) = \lambda_n \tag{1}$$

où λ_1 et λ_n sont les valeurs propres maximale et minimale de A respectivement.

Solution. *Nous utilisons la factorisation*

$$A = P^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P$$

où $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$, et $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice orthogonale dont les colonnes sont $p_1, \dots, p_n$. Si $x = \sum_i \alpha_i p_i$, alors

$$\|x\|^2 = \sum_i \alpha_i^2 \text{ et } x^T Ax = \sum_i (\lambda_i \alpha_i^2)$$

et si $\|x\|^2 = 1$,

$$\lambda_n = \lambda_n \sum_i \alpha_i^2 \leq \sum_i (\lambda_i \alpha_i^2) \leq \lambda_1 \sum_i \alpha_i^2 = \lambda_1.$$

Exercice 6. Une matrice A lequelle est réelle symétrique, différente de la matrice zéro, telle que toute composante sur la diagonale est zéro est indéfinie. C'est-à-dire, il existe deux vecteurs $u \neq v$ tels que $u^T Au < 0 < v^T Av$.

Solution. *Pour les valeurs propres λ_i de A, on sait que* $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$. *La matrice A n'est pas egale a zero, alors il existe deux valeurs propres $\lambda_- < 0 < \lambda_+$. Pour les vecteurs propres correspondantes, on a $v_-^T Av_- > 0 > v_+^T Av_+$.*

Exercice 7. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique définie positive, c'est-à-dire que toutes les valeurs propres de A sont positives. Montrer qu'il existe une matrice symétrique définie positive $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que $A = B^T B$.

Solution. *A est une matrice symétrique, alors il existe une matrice orthogonale P telle que*

$$P^T \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sont les valeurs propres de A. Soit D la matrice $P^T AP$ diagonale. Comme A est définie positive, on a $\lambda_i > 0$ pour tout $i = 1 \ldots, n$ et alors $D = C^T C$, où

$$C = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Comme $P^T = P^{-1}$, on obtient que

$$A = PDP^T = PC^T CP^T = PC^T P^T PCP^T = (PC^T P^T)(PCP^T) = (PCP^T)^T (PCP^T).$$

ainsi $A = B^T B$, où $B = PCP^T$. Il reste à montrer que B est vraiment symétrique et définie positive. Les valeurs propres de B sont les mêmes de que les valeurs propres de C, donc B est définie positive. De plus,

$$B^T = (PCP^T)^T = (P^T)^T C^T P^T = PCP^T = B.$$