

## Objectifs

- ▶ Réseau, flot de  $s$  à  $t$
- ▶ Flot max et coupe min
- ▶ Intégrité
- ▶ Algorithme de Ford & Fulkerson
- ▶ Algorithme de Edmonds & Karp

### Définition 4.46 (Réseau, flot de $s$ à $t$ )

Un réseau avec des capacités est représenté par un graphe orienté simple  $D = (V, A)$  et une **fonction de capacité**  $u : A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Une fonction  $f : A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  est appelée un **flot de  $s$  à  $t$** , si

$$\sum_{e \in \delta^{out}(v)} f(e) = \sum_{e \in \delta^{in}(v)} f(e), \text{ pour tout } v \in V - \{s, t\}, \quad (36)$$

où  $s, t \in V$ . Le flot est **admissible**, si  $f(e) \leq u(e)$  pour tout  $e \in A$ . La **valeur** de  $f$  est défini comme  $value(f) = \sum_{e \in \delta^{out}(s)} f(e) - \sum_{e \in \delta^{in}(s)} f(e)$ . Le **problème de flot maximal de  $s$  à  $t$**  est le problème de déterminer un flot maximal de  $s$  à  $t$  qui est admissible.

### Coupes

Pour  $U \subseteq V$ ,  $\delta^{in}(U)$  dénote les arcs qui entrent dans  $U$  et  $\delta^{out}(U)$  dénote les arcs sortant de  $U$ . Des ensembles d'arcs de la forme  $\delta^{out}(U)$  sont appelés une **coupe** de  $D$ . La **capacité d'une coupe**  $u(\delta^{out}(U))$  est la somme des capacités de ses arcs.

$$\max \sum_{e \in \delta^{out}(s)} x(e) - \sum_{e \in \delta^{in}(s)} x(e) \quad (37)$$

$$\sum_{e \in \delta^{out}(v)} x(e) = \sum_{e \in \delta^{in}(v)} x(e), \text{ pour tout } v \in V - \{s, t\} \quad (38)$$

$$x(e) \leq u(e), \text{ pour tout } e \in A \quad (39)$$

$$x(e) \geq 0, \text{ pour tout } e \in A \quad (40)$$

### Définition 4.47 (Fonction d'excès)

Pour tout  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , la fonction d'excès ;  $exces_f : 2^V \rightarrow \mathbb{R}$  est définie par  $exces_f(U) = \sum_{e \in \delta^{in}(U)} f(e) - \sum_{e \in \delta^{out}(U)} f(e)$ .

### Remarque

Si le PL est borné et les capacités sont des nombres entiers, le PL a une solution optimale intégrale, dès que la **matrice d'incidence sommets-arcs d'un graphe orienté** est totalement unimodulaire.

### Définition 4.48 (Fonction d'excès)

Pour tout  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , la fonction d'excès ;  $exces_f : 2^V \rightarrow \mathbb{R}$  est définie par  $exces_f(U) = \sum_{e \in \delta^{in}(U)} f(e) - \sum_{e \in \delta^{out}(U)} f(e)$ .

### Théorème 4.49

Soit  $D = (V, A)$  un graphe orienté, soit  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $U \subseteq V$ , alors

$$exces_f(U) = \sum_{v \in U} exces_f(v). \quad (41)$$

### Théorème 4.50 (Dualité faible)

Soit  $f$  un flot admissible de  $s$  à  $t$  et soit  $\delta^{out}(U)$  une coupe de  $s-t$ , alors  $value(f) \leq u(\delta^{out}(U))$ .

### Définition 4.51 (Graphe résiduel)

Soit  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  et  $u: A \rightarrow \mathbb{R}$  où  $0 \leq f \leq u$ . Considérons l'ensemble d'arcs

$$A_f = \{a \mid a \in A, f(a) < u(a)\} \cup \{a^{-1} \mid a \in A, f(a) > 0\}. \quad (42)$$

Le graphe orienté  $D(f) = (V, A_f)$  est appelé **graphe résiduel** de  $f$  (pour des capacités  $u$ ).

### Corollaire 4.52

Soit  $f$  un flot admissible de  $s$  à  $t$  et supposons qu'il n'y a pas de chemin de  $s$  à  $t$  dans  $D(f)$ , alors  $f$  est de valeur maximale.

### Définition 4.53 (Marche non-orienté)

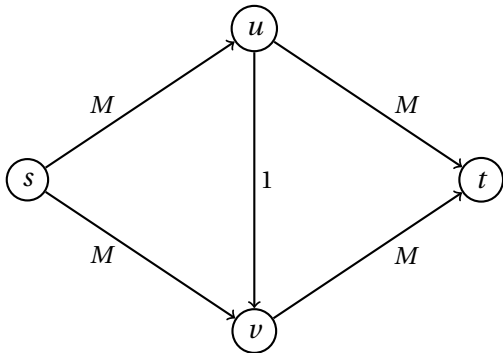
Une **marche non-orienté** est une séquence de la forme  $P = (v_0, a_1, v_1, \dots, v_{m-1}, a_m, v_m)$ , où  $a_i \in A$  pour  $i = 1, \dots, m$  et  $a_i = (v_{i-1}, v_i)$  ou  $a_i = (v_i, v_{i-1})$ . Si les sommets  $v_0, \dots, v_m$  sont tous différents, alors  $P$  est un **chemin non-orienté**.

Tout chemin orienté  $P$  dans  $D(f)$  induit un chemin non-orienté dans  $D$ . Définissons pour un tel chemin  $P$  le vecteur  $\chi^P \in \{0, \pm 1\}^A$  comme

$$\chi^P(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } P \text{ traverse } a, \\ -1 & \text{si } P \text{ traverse } a^{-1}, \\ 0 & \text{si } P \text{ ne traverse ni } a \text{ ni } a^{-1}. \end{cases} \quad (43)$$

### Théorème 4.54 (Théorème du flot max et de la coupe min, dualité forte)

*La valeur maximale d'un flot admissible de  $s$  à  $t$  est égale à la capacité d'une coupe minimale de  $s - t$ .*



### Corollaire 4.55 (Théorème d'intégrité)

*Si  $u(a) \in \mathbb{N}$  pour tout  $a \in A$ , alors il existe un flot maximal entier ( $f(a) \in \mathbb{N}$  pour tout  $a \in A$ ).*

### Théorème 4.56

*Si à chaque itération nous choisissons un plus court chemin de  $s$  à  $t$  dans  $D(f)$  comme chemin d'augmentation de flot, le nombre d'itérations est au plus  $|V| \cdot |A|$ .*

### Définition 4.57

Soient  $D = (V, A)$  un graphe orienté,  $s, t \in V$  et  $\mu(D)$  la longueur d'un plus court chemin de  $s$  à  $t$ . Soit  $\alpha(D)$  l'ensemble d'arcs contenu dans au moins un des plus courts chemins de  $s$  à  $t$ .

### Théorème 4.58

*Soit  $D = (V, A)$  un graphe orienté et  $s, t \in V$ . Définissons  $D' = (V, A \cup \alpha(D)^{-1})$ . Alors  $\mu(D) = \mu(D')$  et  $\alpha(D) = \alpha(D')$ .*

### Corollaire 4.59

*Un flot maximal peut être déterminé en temps  $O(nm^2)$ .*



## Objectifs

- ▶ Réseau, flot de  $s$  à  $t$
- ▶ Flot max et coupe min
- ▶ Intégrité
- ▶ Algorithme de Ford & Fulkerson
- ▶ Algorithme de Edmonds & Karp

## Objectifs

- ▶ Réseau, flot de  $s$  à  $t$  ✓
- ▶ Flot max et coupe min ✓
- ▶ Intégrité ✓
- ▶ Algorithme de Ford & Fulkerson ✓
- ▶ Algorithme de Edmonds & Karp ✓