

Objectifs

- ▶ Le PL dual et récapitulation du dualité faible
- ▶ Dualité forte
- ▶ Quelques exemples
- ▶ La théorie des jeux matrices, Minimax théorème

Le PL dual

PL primal

$$\max\{c^T x: x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b\} \quad (26)$$

PL dual

Le PL

$$\min\{b^T y: y \in \mathbb{R}^m, A^T y = c, y \geq 0\} \quad (27)$$

est le PL dual du PL (26).

Theorem 4.13 (Dualité faible)

Soient x^ et y^* solutions admissibles du PL (26) et (27) respectivement. Alors*

$$c^T x^* \leq b^T y^*$$

Theorem 4.14 (Dualité forte)

Si le PL (26) est admissible et borné, alors aussi le PL (27) est admissible et borné. De plus, les deux PL ont des solutions optimales et les valeur objectives correspondantes sont identiques.

Corollary 4.15

Si le PL (27) est admissible et borné, alors aussi le PL (26) est admissible et borné. De plus, les deux PL ont des solutions optimales et les valeur objectives correspondantes sont identiques.

P \ D	admissible et borné	non borné	inadmissible
admissible et borné	possible	impossible	impossible
non borné	impossible	impossible	possible
inadmissible	impossible	possible	possible

Un jeu

Les joueurs :

- ▶ Joueur (J1) choisit une ligne i , joueur (J2) choisit une colonne j
- ▶ Récompense de J1 : $A(i, j)$, perte de J2 : $A(i, j)$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

But

- ▶ J1 veut trouver i tel que $\min_j A(i, j)$ est maximal
- ▶ J2 veut trouver j tel que $\max_i A(i, j)$ est minimal

Lemma 4.16

$$\max_i \min_j A(i, j) \leq \min_j \max_i A(i, j)$$

et cette inégalité peut être stricte.

Stratégie mixte

- ▶ J1 : $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m$ tel que $\sum_{i=1}^m x_i = 1$
- ▶ J2 : $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ tel que $\sum_{j=1}^n y_j = 1$
- ▶ J1 et J2 choisissent ligne et colonne aléatoirement selon les distributions x et y respectivement
- ▶ Espérance du profit de J1 :

$$E[\text{Profit}] = x^T A y$$

Theorem 4.17 (Théorème Minimax)

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} x^T A y = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} x^T A y,$$

où X et Y sont les ensembles des stratégies mixtes de J_1 et J_2 respectivement.

Objectifs

- ▶ Le PL dual et récapitulation du dualité faible
- ▶ Dualité forte
- ▶ Quelques exemples
- ▶ La théorie des jeux matrices, Minimax théorème

Objectifs

- ▶ Le PL dual et récapitulation du dualité faible ✓
- ▶ Dualité forte ✓
- ▶ Quelques exemples ✓
- ▶ La théorie des jeux matrices, Minimax théorème ✓