

Optimisation Discrète

Adrian Bock

Semestre de printemps 2011

Série 5

24 mars 2011

Exercice 1 (*), (Δ)

Considérer l'algorithme du simplexe appliqué au programme linéaire

$$\max\{c^T x : Ax \leq b\}.$$

Soit la matrice A de plein rang-colonne. Donner une preuve ou un contre-exemple aux affirmations suivantes :

- (i) Le sommet d'un toit est toujours admissible pour les itérations précédentes de l'algorithme.
- (ii) Un index qui est juste sorti du toit ne peut pas rentrer dans le toit à l'itération suivante.
- (iii) Un index qui est juste entré dans le toit ne peut pas quitter le toit à l'itération suivante.
- (iv) Dans l'étape iii), on trouve $\lambda^* = 0$ seulement si le toit courant est dégénéré.

Exercice 2

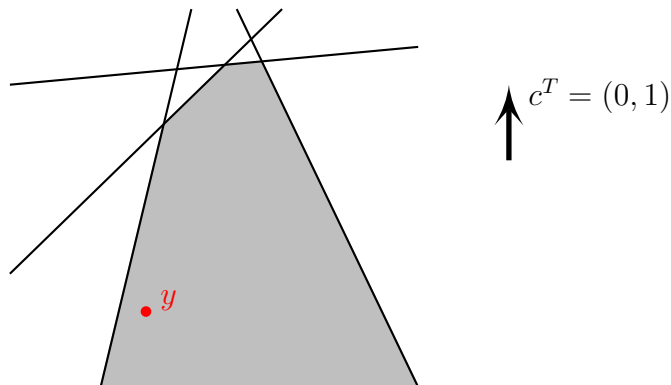
Considérer le programme linéaire

$$\max\{c^T x : Ax \leq b\} \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n.$$

Soit y une solution admissible telle que $Ay < b$. Donner l'esquisse d'un algorithme pour trouver un sommet x du polyèdre $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ tel que $c^T x \geq c^T y$.

L'algorithme doit terminer après n étapes au plus et à chaque itération, l'élimination de Gauss-Jordan peut être utilisée, mais pas l'algorithme du simplexe.

- (i) D'abord, trouver une stratégie pour trouver le sommet optimal dans le dessin ci-dessous.



(ii) En déduire une stratégie générale en formalisant l'étape précédente.

Exercice 3

Considérer le programme linéaire

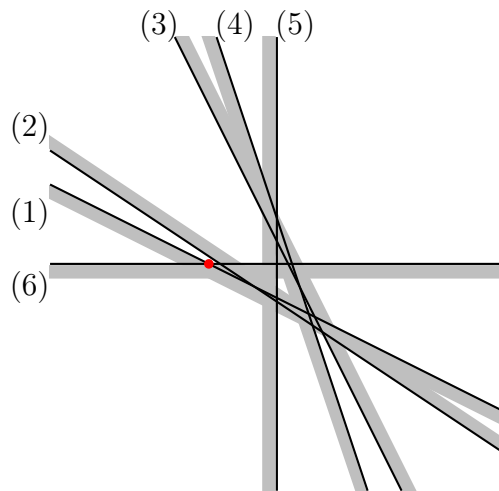
$$\begin{array}{rllll}
 \max & & z & & \\
 \text{sous contraintes} & x + 2y & \leq & -3 & (1) \\
 & -2x - 3y & \leq & 5 & (2) \\
 & -2x - y + 2z & \leq & -1 & (3) \\
 & 3x + y & \leq & 2 & (4) \\
 & x & \leq & 0 & (5) \\
 & y & \leq & 0 & (6) \\
 & z & \leq & 0 & (7)
 \end{array}$$

Pour le résoudre, on applique l'algorithme du simplexe et on commence avec le toit défini par les indices des lignes (1), (6) et (7). La situation en dimension 2 grâce à l'hyperplan $z = 0$ est figurée ci-dessous.

Démontrer que l'algorithme du simplexe pourrait ne pas se terminer en donnant une suite périodique de toits qui peuvent être choisis au cours de l'algorithme du simplexe. Expliquer pourquoi votre suite est un choix valable.

(Il est suffisant d'indiquer la suite sur un dessin. Il ne faut pas calculer tous les sommets de façon explicite.)

Indication : Faire rester l'index (7) dans le toit. Donc on peut se limiter à deux dimensions comme figuré ci-dessous.



Le rendu peut être fait en groupe de trois personnes au plus.