Prof. F. Eisenbrand EPFL - DISOPT

Optimisation Discrète

Adrian Bock Semestre de printemps 2011

Série 3 — 10 mars 2011

Remarque générale :
Pour obtenir un bonus pour l'évaluation finale, vous pouvez rendre une solution à l'exercice SAGE sur `http ://disoptsrv1.epfl.ch/opt11/` avant le début du cours du **24 mars** et une version écrite avant (le début de) la séance.

Le rendu peut être fait en groupe de trois personnes au plus.

Exercice 1

Résoudre le programme linéaire suivant à l'aide de l'algorithme du simplexe.

$$\begin{array}{lll} \max & x_1 + 2x_2 & \\ & -4x_1 + 2x_2 & \leq -2 \\ & 2x_1 + 3x_2 & \leq 15 \\ & 3x_1 + 2x_2 & \leq 12 \\ & x_1 & \leq 4 \\ & x_2 & \leq 5 \end{array}$$

Commencer avec le toit initial décrit par les deux dernières contraintes et procéder de manière itérative pour trouver le toit optimal.

Indication : Faites un dessin pour déterminer la ligne qui entre dans le toit et la ligne qui sort le toit dans chaque itération. Justifiez votre choix.

Exercice 2

Considérer le programme linéaire

$$\begin{array}{lll} \max & 9x_1 + 5x_2 + 4x_3 & \\ & 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 & \leq 2 \\ & 2x_1 + x_2 + 4x_3 & \leq 3 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 & \leq 8 \\ & -3x_1 - 2x_2 - 2x_3 & \leq 1 \\ & -3x_1 - x_2 + x_3 & \leq -1 \end{array}$$

Trouver toutes les combinaisons des contraintes qui décrivent un toit.

Indication : Vous pouvez utiliser un logiciel comme SAGE.

Exercice 3

Une droite D est un ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n \colon x = \lambda v + u \text{ pour } \lambda \in \mathbb{R}\}$ défini par deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^n$.

Démontrer qu'un polyèdre $P = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax \leq b\}$ non-vide contient une droite (c'est-à-dire il existe $u, v \in \mathbb{R}^n$ avec $a \neq 0$ tel que $D(u, v) \subseteq P$) si et seulement si A n'est pas de plein rang-colonne.

Exercice 4

Soient

(1) $$\max\{c^T x \colon x \in \mathbb{R}^n,\ Ax \leq b\}$$

et

(2) $$\max\{c'^T y \colon y \in \mathbb{R}^{n'},\ A'y \leq b\}$$

les programmes linéaires avant et après la transformation à l'aide de l'élimination de Gauss-Jordan avec la notation vue en cours. Supposons que les n'' dernières composantes de $c^T \cdot U$ sont zéros et que le PL (2) est admissible.

Soit y^* une solution optimale du PL (2) et λ' un certificat de l'optimalité, c'est-à-dire $\lambda'^T A' = c'^T$ et $\lambda'^T b = c'^T y^*$. Donner une solution optimale du PL (1) et un certificat de l'optimalité.

Exercice SAGE $(*), (\Delta)$

Implémenter le pas (iii) de l'algorithme du simplexe à l'aide de SAGE.

En autres termes, trouver et retourner un nouveau toit B' partant de la description d'un programme linéaire (cest-à-dire une matrice A, des vecteurs b, c), un toit B et une ligne i contredite par le sommet du toit B. Pour ce faire, utiliser l'interface `def step_3(A,c,B,i)`, où A est une matrice rationelle, c et B sont des vecteurs (à définir p.e. par `vector(QQ, dim)`) et i est un entier.