
Algèbre linéaire avancée II
printemps 2016

Série 13

Exercice 1. On considère un système différentiel $\dot{x} = Ax$ et on suppose que A est une matrice nilpotente, si bien que $A^m = 0$ pour un certain entier $m > 0$. Montrer que, dans une solution $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, chaque fonction $x_i(t)$ est un polynôme en t et qu'il est de degré au plus $m - 1$.

Exercice 2. Résoudre l'équation différentielle $\ddot{u}(t) - 2\dot{u}(t) - 8u(t) = 6$ avec conditions initiales $u(0) = 3$, $\dot{u}(0) = 0$.
Indication : Poser $x_1(t) = u(t)$, $x_2(t) = \dot{u}(t)$, et passer à un système différentiel.

Algorithme d'Euclide Soient f, g des polynômes sur le corps K (dans $K[t]$, i.e., avec coefficients dans K). Si $\deg g \geq 0$ (on assume $\deg(0) = -\infty$), alors il existe deux polynômes q et r dans $K[t]$ tels que

$$f(t) = q(t)g(t) + r(t),$$

avec $\deg(r) < \deg(g)$. Les polynômes q et r sont uniquement déterminés par ces conditions.

Exercice 3. Soit K un corps tel que chaque polynôme non-constant dans $K[t]$ admet une racine dans K . Soit f un polynôme de ce type. Alors il existe des éléments $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ et $c \in K$ tels que

$$f(t) = c(t - \alpha_1) \cdots (t - \alpha_n).$$

Exercice 4. Soit f un polynôme sur $K[t]$ de degré n . Alors il y a au plus n racines de f dans K .

Exercice 5. Dans chacun des cas suivants, écrire $f = qg + r$, avec $\deg(r) < \deg(g)$

1. $f(t) = t^2 - 2t + 1$, $g(t) = t - 1$,
 2. $f(t) = t^3 + t - 1$, $g(t) = t^2 + 1$,
 3. $f(t) = t^3 + t$, $g(t) = t$,
 4. $f(t) = t^3 - 1$, $g(t) = t - 1$.
-

Exercice 6. Soient f et g des polynômes sur $\mathbb{Z}[t]$. Si le polynôme $g(t)$ a 1 comme coefficients devant le plus haut degré (i.e., $g(t) = t^n + b_{n-1}t^{n-1} + \cdots + b_1t + b_0$), montrer que quand on exprime f avec la décomposition $f = qg + r$ avec $\deg(r) < \deg(g)$, alors les polynômes q et r sont sur \mathbb{Z} .

Exercice 7.

1. Montrer que $t^n - 1$ est divisible par $t - 1$.
 2. Montrer que $t^4 + 4$ peut être factorisé comme produit de polynômes de degré 2 avec des coefficients entiers.
 3. Si n est impaire, trouver le quotient de $t^n + 1$ par $t + 1$.
-

Exercice 8. Soit $f(t) = t^n + \dots + a_0$ un polynôme à coefficients complexes, $\deg(f) = n$ et soit α une racine. Montrer que $|\alpha| \leq n \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|$.

Indication : écrire $-\alpha^n = a_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + a_0$. Si $|\alpha| > n \max_i |a_i|$ diviser par α^n et prendre la valeur absolue. On trouve une contradiction.

Exercice 9 (Algorithme d'Euclide étendu). Soient f et g deux polynômes non-nuls sur un corps K . Alors il existe deux polynômes q et r sur $K[t]$ tels que

$$f(t)q(t) + g(t)r(t) = \gcd(f, g),$$

avec $\deg(q) < \deg(g) - \deg(\gcd(f, g))$, et $\deg(r) < \deg(f) - \deg(\gcd(f, g))$.