**Algèbre linéaire avancée II**
printemps 2017

**Série 13**

⋆ Cette semaine, sucun exercise n'est à rendre.

**Exercice 1.** Soit $J$ un bloc Jordan de taille $k \times k$ avec $\lambda$ sur la diagonale. Montrer que

(i) Le polynôme caractéristique de $J$ est $p_J(t) = (\lambda - t)^k$.

(ii) $J$ possède $\lambda$ comme seule valeur propre.

(iii) Le polynôme minimal de $J$ est $m_J(t) = (\lambda - t)^k$.

(iv) La multiplicité géométrique de $\lambda$ est 1.

**Exercice 2.** Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice en forme normale de Jordan,

$$A = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_k \end{pmatrix}$$

où les matrices $B_j \in C^{n_j \times n_j}$ sont des blocs Jordan. Écrire $A$ comme $A = D + N$ où

- $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est une matrice diagonale,
- $N \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est une matrice nilpotente,
- $D$ et $N$ commutent.

**Exercice 3.** Soient $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ et soient $P, J \in \mathbb{C}^{n\times n}$ telles que $P$ est inversible, $J$ est en forme normale de Jordan et $A = P^{-1}JP$.

(i) Montrer que les polynômes caractéristiques de $A$ et de $J$ sont les mêmes.

(ii) Conclure que les valeurs sur la diagonale de $J$ sont précisément les valeurs propres de $A$.

**Exercice 4.** Vrai ou faux:

(a) Si $J$ est la forme normale de Jordan pour une matrice $A$, $J^2$ est la forme normale de Jordan pour $A^2$.

(b) Si $A$ et $B$ sont deux matrices $\in \mathbb{C}^{n\times n}$, les matrices $AB$ et $BA$ ont les mêmes formes normales de Jordan.

**Exercice 5.** Donner la forme normale de Jordan $J$ pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & -3 \\ -6 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 6.** Soit $A \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ une matrice avec polynôme caractéristique

$$p_A(\lambda) = (\lambda+2)^4(\lambda-1)^2.$$

Combien y a-t-il de formes normales de Jordan possibles pour $A$?

**Exercice 7.** Soit $A$ une matrice $\mathbb{C}^{n\times n}$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de $A$. Utiliser la forme normale de Jordan pour montrer que $\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k$ sont les valeurs propres de $A^k$ pour tout $k \geq 0$.

**Exercice 8.** Soit $A$ une matrice $\in \mathbb{C}^{n\times n}$. Montrer que $A$ et $A^T$ sont semblables.