Prof. F. Eisenbrand EPFL - DISOPT

Optimisation Discrète

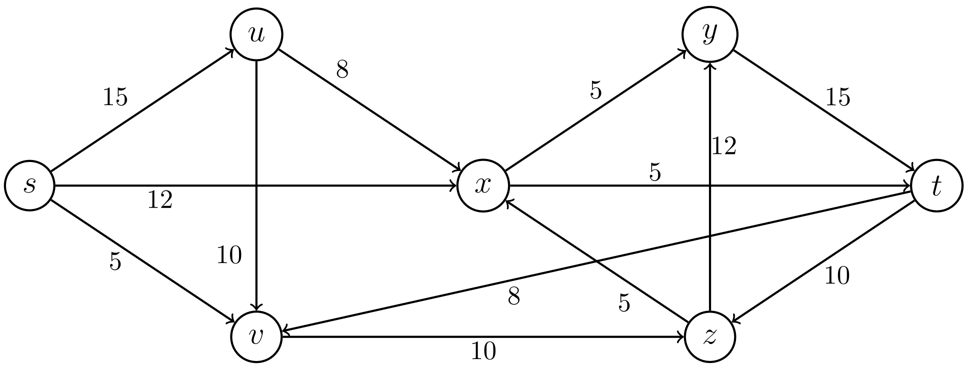
Adrian Bock Semestre de printemps 2011

Série 12 **19 mai 2011**

Remarque générale :
Pour obtenir un bonus pour l'évaluation finale, vous pouvez rendre des solutions écrites à l'exercice noté avant (le début de) la séance de la semaine prochaine.
Le rendu peut être fait en groupe de trois personnes au plus.

Exercice 1

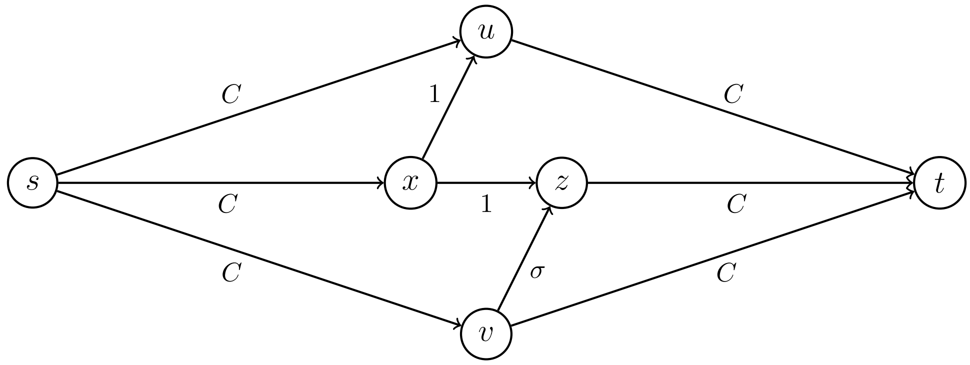
Considérer le réseau suivant :



Appliquer l'algorithme de Ford-Fulkerson pour trouver un flot maximal de s à t. À chaque itération, donner le graphe résiduel et marquer le chemin d'augmentation choisi.
Donner en plus une coupe minimale de s-t dans le réseau.

Exercice 2 $(*), (\Delta)$

Considérer le réseau suivant, où C est une très grande capacité et $\sigma < 1$ un nombre positif.



Il s'agit de démontrer que l'algorithme de Ford-Fulkerson ne termine pas pour un certain choix de σ.

– Quel est le flot maximal de s à t ? Quelle est sa valeur ?
– Soit $\sigma = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$. Trouver une suite des chemins d'augmentation qui concourt à un flot de valeur 7 au plus.

Donner tous les chemins d'augmentation utilisés et les graphes résiduels correspondants.

Indication : Pour les arcs $(x, u), (x, z), (v, z)$, essayer de revenir toujours à des capacités sous forme $\sigma^{k-1}, 0, \sigma^k$ pour $k \in \mathbb{N}$ dans le graphe résiduel après quelques itérations d'augmentation.
Finalement, on prend un chemin d'augmentation C pour obtenir une augmentation de σ^{k+1} et des capacités $\sigma^{k+1}, 0, \sigma^{k+2}$:

Exercice 3

Un graphe non-orienté $G = (V, E)$ est *connexe* s'il existe un chemin de u à v dans G pour chaque couple de sommets $u, v \in V$.
Un graphe connexe est k-arête-connexe s'il est possible de le déconnecter en supprimant k arêtes et si k est minimal.
Montrer comment on peut déterminer le nombre k d'un graphe $G = (V, E)$ (tel que G est k-arête-connexe) en appliquant un algorithme de flot à $|V|$ réseau au plus, où chacun est constitué de $\mathcal{O}(V)$ sommets et $\mathcal{O}(E)$ arcs.

Indication : Considérer le graphe orienté $D = (V, A)$, où on a des arcs (u, v) et (v, u) pour chaque arête $\{u, v\}$ (c-à-d $A = \{(u, v) : \{u, v\} \in E\}$). Y a-t-il une relation entre le nombre k de G et les coupes minimales dans G ?

Exercice 4

Donner une manière de trouver un couplage de cardinalité maximale dans un graphe biparti qui s'exécute en temps $\mathcal{O}(nm)$ en utilisant des flots.