Prof. F. Eisenbrand EPFL - DISOPT

# Optimisation Discrète

Adrian Bock Semestre de printemps 2011

## Série 2 — 3 mars 2011

Remarque générale :
Pour obtenir un bonus pour l'évaluation finale, vous pouvez rendre des solutions écrites à l'exercice noté avant (le début de) la séance de la semaine prochaine. On peut obtenir deux points bonus cette semaine. L'exercice 2 est une question de programmation. Les exercices à rendre sont les mêmes pour tous les étudiants.
**Le rendu peut être fait en groupe de trois personnes au plus.**

**Exercice 1** $(*), (\Delta)$

Résoudre le programme linéaire

$$\max\{c^T x \colon x \in \mathbb{R}^n,\ Ax = b\}$$

avec

(i) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 8 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $c^T = (2,4,5,1,3)$

(ii) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $c^T = (1,1,1,0,2)$

(iii) $A$, $b$ comme (ii), mais $c^T = (1,1,1,2,0)$

Dans chaque cas, indiquer si le PL est admissible et s'il est borné.

**Remarque :** Considérer le noyau de la matrice $A$.

**Exercice 2** $(*, \Delta)$

Modifier l'élimination de Gauss-Jordan vue en cours de telle sorte que la matrice obtenue soit sous la forme échelonnée réduite en lignes et que l'inverse $U^{-1}$ de la matrice $U$ de transvection soit aussi calculée par l'algorithme.
Si vous voulez, vous pouvez utiliser le code exemplaire `gauss2.py` disponible sur la site web du cours. Noter que Python n'admet qu'une seule valeur de retour. Donc on peut donner une liste des deux matrices $U$, $U^{-1}$, par exemple.

Vous devez rendre votre solution non seulement sur papier, mais aussi de façon électronique (un programme SAGE), par mail à adrianaloysius.bock [at] epfl.ch avant le début du cours du 10 mars.

## Exercice 3

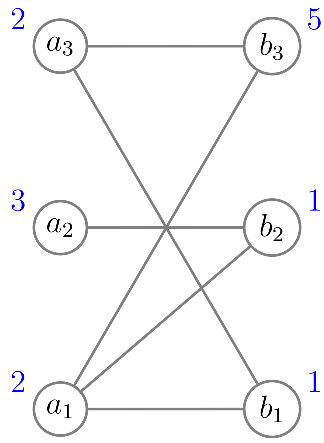
Démontrer que le système linéaire suivant n'admet pas de solution.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 7 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

En autres termes, donner une combinaison des lignes pour obtenir une contradiction comme montré pendant le cours.

## Exercice 4

Considérons le graphe biparti $G = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}, E)$ avec $E \subset \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ représenté à droite. On donne des poids $c$ positifs sur les nœuds. Nous cherchons un transversal[1] dans $G$ tel que la somme des poids des nœuds choisis soit minimisée.




Démontrer que $C = \{a_1, b_2, a_3\}$ est une solution optimale.

**Indication :**

Le programme linéaire suivant décrit le problème
(à voir plus tard dans le Cours)

$$\begin{array}{rcll} \min & \displaystyle\sum_{v \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}} c_v x_v & & \\ x_v + x_w & \geq & 1 & \forall e \in E \\ x_v & \geq & 0 & \forall v \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \end{array}$$

Utiliser l'idée expliquée dans l'exercice 2 de la série 1 !
$\Big(\lambda = (1, 0, 1, 1, 0, 2, 0, 2, 0, 0, 0, 2)\Big)$

1. Rappelons qu'un transversal (ou couverture de sommets) d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble de sommets $S \subseteq V$ contenant au moins une extrémité de chaque arête.