OPTIMISATION DISCRÈTE
PROF. F. EISENBRAND

Semestre de printemps 2013
27 juin 2013

Examen blanc

Nom : Prénom :

Exercice :	1	2	3	4	5	6	Σ
Note maximale :	10	10	10	10	10	10	50
Points obtenus :							
Exercices choisis :							

Contrôlez si le sujet est complet : il doit se composer de 9 pages (Exercices 1–6). Inscrivez vos nom et prénom sur la couverture. La réponse doit être rédigée sous l'exercice, et éventuellement au recto. Justifiez les réponses et argumentez d'une manière claire et compréhensible. Si vous avez besoin de papier, demandez-en à l'un des assistants. Indiquez sur chaque feuille supplémentaire votre nom et l'exercice correspondant.

Utiliser un stylo de couleur autre de rouge, pas de crayon !

Durée : 3 heures

Notation :
Chaque exercice est noté sur 10 points et vous devez travailler sur 5 exercices.
Indiquer les 5 exercices choisis dans le tableau ci-dessus !

Aucune aide n'est permise pendant l'examen !

Exercice 1 : (QCM, chaque question est notée dans $\{-1, 0, 1\}$, l'exercice rapporte $\max\{0, \Sigma\}$)
Aucune justification nécessaire. Marquer 'oui' ou 'non'.
Des réponses fausses entraînent des points négatifs !

a) Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$. S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tel que $A^T\lambda \geq 0$ et $b^T\lambda < 0$, alors le système $Ax = b$, $x \geq 0$ est inadmissible.	○ **<u>oui</u>** ○ non
b) Étant donné $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$, on a $$\min\{c^T x \mid Ax = b,\ x \geq \mathbf{0}\} = \max\{b^T y \mid A^T y \leq c\}$$ si les deux PL sont admissibles.	○ **<u>oui</u>** ○ non
c) Considérer un polyèdre P non-vide et supposer que pour chaque variable x_i, on ajoute soit la contrainte $x_i \geq 0$ soit $x_i \leq 0$. Est-il vrai que le polyèdre résultant a au moins une solution basique admissible ?	○ oui ○ **<u>non</u>**
d) Pour tout graphe non-orienté $G = (V, E)$, la matrice d'incidence sommets-arêtes est totalement unimodulaire.	○ oui ○ **<u>non</u>**
e) Étant donné le PL $\max\{c^T x \mid Ax \leq b\}$, avec $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}, b \in \mathbb{Z}^m, c \in \mathbb{R}^n$, A de plein rang-colonne. Si A est totalement unimodulaire, alors chaque solution basique du PL est un vecteur intégral.	○ **<u>oui</u>** ○ non
f) Le programme linéaire suivant a une solution optimale qui est intégrale. $$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 + x_3 \leq 1 \\ & x_2 + x_3 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$	○ oui ○ **<u>non</u>**
g) Étant donné un PL $$\max\{c^T x \mid Ax \leq b\},$$ avec $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$. Si $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$ sont des solutions optimales du PL, alors le vecteur $\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}$ est une solution optimale pour tout $0 \leq \lambda \leq 1$.	○ **<u>oui</u>** ○ non
h) Étant donné le PL $\max\{c^T x \mid Ax \leq b\}$, avec $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$, soit j la contrainte qui entre dans la base pendant l'itération i de l'algorithme du simplexe. Alors cette contrainte ne peut pas sortir de la base pendant l'itération $(i+1)$.	○ **<u>oui</u>** ○ non
i) Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté avec une fonction de longueur $\ell : A \to \mathbb{Z}$. On peut décider s'il existe un cycle négatif (par rapport à ℓ) en temps $O(\lvert V\rvert \cdot \lvert A\rvert)$.	○ **<u>oui</u>** ○ non
j) Le problème du sac-à-dos peut être résolu en temps polynômial.	○ oui ○ **<u>non</u>**

Exercice 2 (Dualité, RC):

Considérer le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \min & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & & \\ & x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 20 \\ & -x_1 & & & + & 3x_3 & \leq & 10 \\ & & - & 2x_2 & + & x_3 & \geq & 3 \\ & 4x_1 & + & x_2 & & & \leq & 40 \\ & x_1 & - & 10x_2 & + & x_3 & \geq & -3 \end{array} \tag{1}$$

(a) Trouver le dual du PL (1).

(b) Montrer que $x^* := (\frac{19}{8}, \frac{9}{16}, \frac{33}{8})^T$ est une solution optimale du PL (1) en donnant une solution admissible sous la forme duale.

Indication : Utiliser le théorème vu comme exercice (relâchement complémentaire) : étant donnée une solution optimale x^* sous forme primale, il existe une solution optimale y^* sous forme duale telle que $y_i^* = 0$ pour toute ligne i du PL primal qui n'est pas satisfaite avec égalité par x^*.

Solution:

(a) The LP in inequality standard form looks as follows:

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\max & -2x_1 & - & 2x_2 & - & 4x_3 & & \\
 & x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & \leq & 20 \\
 & -x_1 & - & 2x_2 & - & 4x_3 & \leq & -20 \\
 & -x_1 & & & + & 3x_3 & \leq & 10 \\
 & & & 2x_2 & - & x_3 & \leq & -3 \\
 & 4x_1 & + & x_2 & & & \leq & 40 \\
 & -x_1 & + & 10x_2 & - & x_3 & \leq & 3
\end{array}$$

A dual is:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcr}
\min & 20y_1 & - & 20y_2 & + & 10y_3 & - & 3y_4 & + & 40y_5 & + & 3y_6 & & \\
 & y_1 & - & y_2 & - & y_3 & & & + & 4y_5 & - & y_6 & = & -2 \\
 & 2y_1 & - & 2y_2 & & & + & 2y_4 & + & y_5 & + & 10y_6 & = & -2 \\
 & 4y_1 & - & 4y_2 & + & 3y_3 & - & y_4 & & & - & y_6 & = & -4 \\
 & y_1 & , & y_2 & , & y_3 & , & y_4 & , & y_5 & , & y_6 & \geq & 0
\end{array}$$

(b) We see that x^* is a feasible solution as all constraints are satisfied. The first four constraints are satisfied with equality, whereas the last 2 constraints are satisfied with strict inequality. From the complementary slackness theorem we know that if x^* is optimal, then the dual has an optimal solution where $y_5 = y_6 = 0$.

Thus consider the system

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
y_1 & - & y_2 & - & y_3 & & & = & -2 \\
2y_1 & - & 2y_2 & & & + & 2y_4 & = & -2 \\
4y_1 & - & 4y_2 & + & 3y_3 & - & y_4 & = & -4
\end{array}$$

The first two columns are linearly dependent, thus we omit column 2 and consider the system:

$$\begin{array}{rcrcrcr}
y_1 & - & y_3 & & & = & -2 \\
2y_1 & & & + & 2y_4 & = & -2 \\
4y_1 & + & 3y_3 & - & y_4 & = & -4
\end{array}$$

We see that $y_1 = -\frac{11}{8}$, $y_3 = \frac{5}{8}$ and $y_4 = \frac{3}{8}$ is the solution to the system. This implies that $y = (0, \frac{11}{8}, \frac{5}{8}, \frac{3}{8}, 0, 0)$ is a feasible solution of the dual. Its objective value is $-\frac{179}{8}$ as the objective value of x^* for the primal. This asserts that x^* is optimal.

Utiliser le verso pour plus d'espace

Exercice 3 (Sommets):

Un polyèdre $P = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax \leq b\}$ *contient une droite*, s'il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ non-nul et un point $x^* \in \mathbb{R}^n$ de sorte que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $x^* + \lambda \cdot v \in P$. Démontrer qu'un polyèdre non-vide ne contient pas de droite si et seulement si la matrice A est de plein rang-colonne.

Solution:
Assume that P contains a line $\{x \ : \ x = x^* + \lambda \cdot v, \ \lambda \in \mathbb{R}\}$. We claim that for all rows a_i of A we have $a_i^T v = 0$. Assume for contradiction that $a_i^T v = \beta \neq 0$. Then we can choose $\lambda \in \mathbb{R}$ such that $a_i^T x^* + \lambda \beta > b_i$. Thus for $x := x^* + \lambda v$ we have $x \notin P$ because $a_i^T x > \beta$. This is a contradiction to the fact that P contains the line $\{x \ : \ x = x^* + \lambda \cdot v, \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
Thus we have $a_i^T v = 0$ for all rows a_i. Thus the kernel of A is not empty, and A does not have full column rank.
Conversely, if A does not have full column rank, let x^* be some feasible point of the polyhedron, and let v be a nonzero vector from the kernel of A. Then $x^* + \lambda \cdot v \in P$ for all $\lambda \in \mathbb{R}$. Hence P contains a line.

Utiliser le verso pour plus d'espace

Exercice 4 (Algorithme du Simplexe):

Considérons le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\max & y_1 & + & 2y_2 & + & 3y_3 & & \\
 & -y_1 & + & 4y_2 & + & 2y_3 & \leq & 5 \\
 & 2y_1 & - & 6y_2 & - & y_3 & \leq & 2 \\
 & 2y_1 & - & 3y_2 & + & 4y_3 & \leq & 1 \\
 & -y_1 & & & & & \leq & 0 \\
 & -y_2 & & & & & \leq & 0 \\
 & -y_3 & & & & & \leq & 0
\end{array}$$

Résolvez le PL en utilisant l'algorithme du simplexe avec la règle de Bland.
Commencez avec la base $B = \{4,5,6\}$ et le sommet $(0,0,0)$.
Pour chaque itération de l'algorithme du simplexe, indiquer l'index de la contrainte qui entre dans la base, l'index de la ligne qui sort de la base, la nouvelle base et la solution basique.

Donner une solution optimale et sa valeur.

Remarque : Pour l'examen, on vous donne les inverses de toutes les matrices qui correspondent à une base.

Solution:

1. itération $B = \{4,5,6\}$, sommet $x_B = (0,0,0)$
2. itération $B = \{3,5,6\}$, sommet $x_B = (1/2,0,0)$
3. itération $B = \{1,3,6\}$, sommet $x_B = (19/5,11/5,0)$

La valeur optimale est $41/5$. Noter qu'un certificat d'optimalité est

$$\lambda^T = (7/5,0/6/5,0,0,23/5),$$

car λ permet d'obtenir une borne supérieure de $41/5$ à la valeur d'objectif.

Utiliser la page suivante pour plus d'espace

Exercice 5 (Modéliser un flot):

Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté biparti (c-à-d qu'il existe $A, B \subset V$ de sorte que $V = A \cup B$ et $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u \in A, v \in B\}$).
Donner une manière de trouver une couverture minimum de sommets dans G qui s'exécute en temps $O(|V| \cdot |E|)$, en utilisant des flots.

Rappel : Une couverture de sommets est un sous-ensemble des sommets qui contient (au moins) une extrémité de chaque arête.

Solution:
Soit A et B une partition des sommets de G en deux stables. Orienter toutes les arêtes vers l'ensemble B.
On ajoute des sommets artificiels s et t et des arcs (s, v) pour tout $v \in A$ et (v, t) pour tout $v \in B$. On choisit une capacité de 1 pour chaque arc. Soit D le graphe obtenu avec $n = |A| + |B| + 2$ sommets et $m = |A| + |B| + |E|$ arcs, où E est l'ensemble d'arêtes du graphe biparti.
Soit S la coupe de s-t de capacité minimale. On définit $A_1 = A \cap S$ et $A_2 = A \setminus S$, $B_1 = B \cap S$ et $B_2 = B \setminus S$.
Soit L l'ensemble des sommets de B_2 qui sont adjacents à des sommets dans A_1.
Alors observer que $C = A_2 \cup B_1 \cup L$ est une couverture de sommets. De plus, noter que $u(\delta^+(S)) = |C|$ et qu'il existe un flot de s à t avec une valeur de $|C|$. Observer que tout couplage de cardinalité k dans G induit un flot de s à t dans D avec une valeur k et vice versa. Par la dualité faible, la cardinalité maximale d'un couplage dans G est au plus la cardinalité d'une couverture minimum de sommets dans G et alors C est optimale.
Comme la valeur du flot maximal est bornée par n (et que les capacités sont entières), il y a n itérations améliorantes au plus. Comme vu en cours, chaque recherche d'un chemin améliorant peut être implémentée en temps $\mathcal{O}(m)$. Alors l'algorithme du flot maximal s'exécute en temps $\mathcal{O}(nm)$.

Utiliser la page suivante pour plus d'espace

Exercise 6 (Programmation dynamique):

Considérer le jeu suivant (jeu de Nim ou *Prends!*) :
Étant donné n tas d'allumettes de taille $c_1, \ldots, c_n$. À tour de rôle, chaque joueur choisit le tas de son choix, et dans ce tas, prend le nombre d'allumettes qu'il veut, au moins une. Le vainqueur est celui qui peut jouer en dernier, c'est-à-dire celui qui prend la dernière allumette.

Considérer ce jeu entre deux joueurs A et B où A commence. Donner un algorithme qui décide lequel des deux peut obtenir la victoire de force (c'est-à-dire indépendant des décisions de l'autre, il rapporte le jeu).

Indication : Vous pouvez utiliser le fait qu'il existe toujours une stratégie gagnante pour un des deux joueurs.

Solution:
Une entrée du tableau $T(d_1, \ldots, d_n) \in \{0, 1\}$ correspond à qui gagne le jeu de la situation avec $d_1, \ldots, d_n$ allumettes sur les n tas. Si le joueur qui commence le jeu gagne, on met 0 et 1 sinon.
D'abord, on initialise $T(0, \ldots, 0) = 1$. Après on calcule

$$T(d_1, \ldots, d_n) = 1 - \max_{1 \leq i \leq n} \max_{0 \leq k < d_i} T(d_1, \ldots, d_{i-1}, k, d_{i+1}, \ldots, d_n).$$

Also si $T(c_1, \ldots, c_n) = 0$, le joueur A peut obtenir la victoire de force, sinon c'est B.

Utiliser le verso pour plus d'espace