CM 6

Dualité

Trouver un toit initial et la forme duale

Cours Optimisation Discrète 31 mars 2011

Friedrich Eisenbrand
EPFL

Règle de Pivotage Lexicographique

**Pseudo-code : Algorithme du Simplexe,
règle de pivotage lexicographique**

Input : $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $R \subseteq \{1, \ldots, m\}$ toit initial
Output : Toit B optimal ou certificat que PL n'est pas admissible.

$B := R$
tant que $\exists i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $a_i x_B^* > b_i$
Calculer y^* solution de
$$\Sigma_{k \in B} a_k y_k = -a_i$$
Calculer $J = \{k \in B \colon y_k^* < 0\}$
si $J = \emptyset$ affirmer **PL inadmissible**
sinon
Choisir l'unique $j \in J$ tel que le vecteur
$\frac{(A_B^{-T}[c|{A_R}^T])_{f_B(j)}}{-y_j^*}$ est lexicographiquement minimal
$B := B \setminus \{j\} \cup \{i\}$

Résultats

Nous avons montré ...

... qu'un programme linéaire $\max\{c^T x \colon x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b\}$ peut être résolu par l'algorithme du simplexe, étant donné un toit initial.

Puisque l'algorithme du simplexe trouve un toit optimal, nous pouvons aussi certifier l'optimalité d'une solution.

Maintenant, nous allons voir comment obtenir le toit initial.

Phase I, trouver un toit initial

Jusqu'à maintenant, nous avons toujours commencé avec un toit initial. Comment l'obtenons-nous ? C'est là qu'intervient la phase I de l'algorithme du simplexe. Plus haut, nous avons décrit la phase II. Tout d'abord, nous prouvons un petit lemme.

Lemme

Si le programme linéaire (28) *est admissible et borné, alors il a un toit optimal. En particulier, un programme linéaire admissible et borné a une solution optimale.*

Phase I, trouver un toit initial

Un PL auxiliaire

Le PL

$$\max\{c^T x \colon x \in \mathbb{R}^n,\ Ax \leq b\} \tag{33}$$

a un toit si et seulement si le programme linéaire

$$\max\{c^T x \colon x \in \mathbb{R}^n,\ Ax \leq 0\} \tag{34}$$

a un toit. (34) est admissible car 0 est une solution admissible. De plus, 0 est une solution optimale de ce programme linéaire si et seulement s'il a un toit.
Exécuter l'algorithme du simplexe sur le programme auxiliaire

$$\max\{c^T x \colon x \in \mathbb{R}^n,\ Ax \leq 0,\ c^T x \leq 1\} \tag{35}$$

avec un toit (éventuellement) dégénéré qui contient l'inégalité $c^T x \leq 1$ et $n-1$ des contraintes de $Ax \leq 0$ dont les vecteurs normaux forment une base de $\mathbb{R}^n$ avec c.

Phase I, trouver un toit initial

Deux cas

A) Le toit optimal contient le sommet 0. Alors nous avons trouvé un toit initial de (33)

B) Le toit optimal contient encore l'inégalité $c^T x \leq 1$. Alors (33) est soit inadmissible soit non-borné.

Exercice de 5 min

Décrire comment déterminer si $Ax \leq b$ est admissible avec l'algorithme du simplexe (Phase II), où comme précédemment, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est de plein rang-colonne. Donner une fonction objectif convenable et un toit initial.

Un exemple

Résoudre le PL avec la phase I et II

$$
\begin{array}{lrcr}
\max & 2x_1 + 2x_2 + x_3 & & \\
 & x_1 + x_2 - x_3 & \leq & 2 \\
 & 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 & \leq & 3 \\
 & x_3 & \leq & 3 \\
 & 4x_1 - 3x_2 & \leq & 1 \\
 & x_1 + 2x_2 & \leq & -2
\end{array}
$$

Résultats

Nous avons montré . . .

. . . qu'un programme linéaire $\max\{c^T x \colon x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b\}$ peut être résolu par élimination de Gauss-Jordan et par l'algorithme du simplexe. (Phase 1 et Phase 2).

Puisque l'algorithme du simplexe trouve un toit optimal, nous pouvons aussi certifier l'optimalité d'une solution.

Nous en verrons plus sur la dualité.

Le PL dual

PL primal

$$\max\{c^T x : x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b\} \tag{36}$$

PL dual

Le PL

$$\min\{b^T y : y \in \mathbb{R}^m, A^T y = c, y \geq 0\} \tag{37}$$

est le PL dual du PL (36).

Dualité faible et forte

Théorème (Dualité faible)

Soient x^* et y^* solutions admissibles des PL (36) et (37) respectivement. Alors

$$c^T x^* \leq b^T y^*$$

Théorème (Dualité forte)

Si le PL (36) est admissible et borné, alors le PL (37) est aussi admissible et borné. De plus, les deux PL ont des solutions optimales et les valeur objectives correspondantes sont identiques.

Corollaire

Si le PL (37) est admissible et borné, alors le PL (36) est aussi admissible et borné. De plus, les deux PL ont des solutions optimales et les valeur objectives correspondantes sont identiques.

Combinaisons possibles

P \ D	admissible et borné	non borné	inadmissible
admissible et borné	possible	impossible	impossible
non borné	impossible	impossible	possible
inadmissible	impossible	possible	possible

Recette de dualisation

		forme primale		forme duale
variables		$x_1, \ldots, x_n$		$y_1, \ldots, y_n$
matrice		A		A^T
membre à droite		b		c
fonction objectif		$\max c^T x$		$\min b^T y$
contraintes	$\leq$	pour contrainte i		$y_i \geq 0$
	$\geq$			$y_i \leq 0$
	$=$			$y_i \in \mathbb{R}$
		$x_j \geq 0$	$\geq$	pour contrainte j
		$x_j \leq 0$	$\leq$	
		$x_j \in \mathbb{R}$	$=$	

Programmes linéaires sous la forme primale et duale

Exemple

$$
\begin{array}{llcc}
\max & 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 & & \\
\to & -x_1 + 2x_2 & \leq & 1 \\
\to & 3x_1 \;-\; x_2 & \geq & 2 \\
\to & \qquad\quad 3x_2 + x_3 & = & 3 \\
\to & x_1 \in \mathbb{R} & & \\
\to & x_2 \geq 0 & & \\
\to & x_3 \leq 0 & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llcc}
\min & y_1 + 2y_2 + 3y_3 & & \\
 & y_1 \geq 0 & & \\
 & y_2 \leq 0 & & \\
 & y_3 \in \mathbb{R} & & \\
 & -y_1 + 3y_2 & = & 5 \\
 & 2y_1 - y_2 + 3y_3 & \geq & 6 \\
 & \qquad\qquad y_3 & \leq & 4
\end{array}
$$

Programmes linéaires sous la forme primale et duale

Exemple

$$
\begin{array}{llcl}
\max & -y_1 - 2y_2 - 3y_3 & & \\
 & y_1 \geq 0 & & \\
 & y_2 \leq 0 & & \\
 & y_3 \in \mathbb{R} & & \\
 & y_1 - 3y_2 & = & -5 \\
 & -2y_1 + y_2 - 3y_3 & \leq & -6 \\
 & \qquad\qquad -y_3 & \geq & -4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llcl}
\min & -5x_1 - 6x_2 - 4x_3 & & \\
 & x_1 - 2x_2 & \geq & -1 \\
 & -3x_1 + x_2 & \leq & -2 \\
 & \qquad -3x_2 - x_3 & = & -3 \\
 & x_1 \in \mathbb{R} & & \\
 & x_2 \geq 0 & & \\
 & x_3 \leq 0 & &
\end{array}
$$