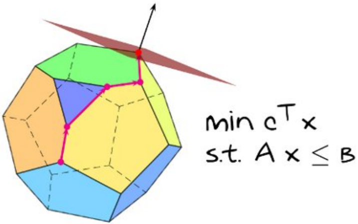
Dualité

- Bornes supérieures
- Le PL dual
- Dualité faible et forte



Bornes supérieures

Quiz

Pour $\max\{c^T x \colon x \in \mathbb{R}^n,\ Ax \leqslant b\}$, quel programme linéaire permet de trouver la meilleure (minimale) borne supérieure admissible pour la valeur d'objectif de toutes les solutions admissibles ?

Le PL dual

Quiz

Dualité faible

Théorème (dualité faible)

Considérer un programme linéaire $\max\{c^T x \colon x \in \mathbb{R}^n,\ Ax \leqslant b\}$ et le PL dual $\min\{b^T y \colon y \in \mathbb{R}^m,\ A^T y = c,\ y \geqslant 0\}$. Si $x^* \in \mathbb{R}^n$ et $y^* \in \mathbb{R}^m$ sont admissibles sous forme primale et duale respectivement, alors $c^T x^* \leqslant b^T y^*$.

Dualité forte

Théorème (Dualité forte)

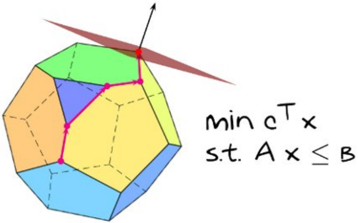
Considérer un programme linéaire $\max\{c^T x \colon x \in \mathbb{R}^n,\ Ax \leqslant b\}$ et le PL dual $\min\{b^T y \colon y \in \mathbb{R}^m,\ A^T y = c,\ y \geqslant 0\}$. Si la forme primale est admissible et bornée, alors il existe un x^* qui est admissible sous forme primale et un y^* qui est admissible sous forme duale tels que $c^T x^* = b^T y^*$.

Dualité forte (cont.)

Dualité forte (cont.)

Dualité

- Trouver la forme duale d'un PL dual
- Autres formes duales
- Certifier l'optimalité
- Lemme de Farkas



La forme dual d'un PL dual est la forme primale

Combinaisons possibles

La forme primale et duale est inadmissible

Exemple

Exemple

Certifier l'optimalité

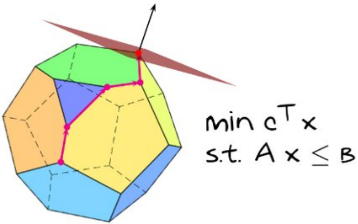
Certifier l'inadmissibilité

Lemme de Farkas

Un système d'inégalités $Ax \leqslant b$ est inadmissible si et seulement s'il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que $\lambda^T A = 0$ et $\lambda^T b = -1$.

Couplage et couverture de sommets

- Exemple
- Une relation min-max



Graphes

Un *graphe non-orienté* $G = (V, E)$ se compose d'un ensemble fini V de *sommets* ou *nœuds* et un ensemble E d'*arêtes*, où uchaque arête $e \in E$ est un sous-ensemble à deux éléments des sommets, $e = \{u, v\}$, $u \neq v \in V$. On écrit aussi $e = uv$.

Problème d'affectation

Graphe biparti

Un graphe $G = (V, E)$ est dit *biparti*, s'il existe une partition de $V = A \dot{\cup} B$ en deux sous-ensembles A et B tel que chaque arête $e \in E$ satisfait $|e \cap A| = |e \cap B| = 1$.

Couplage

Un *couplage* est un sous-ensemble $M \subseteq E$ d'arêtes tel que pour tout $e_1 \neq e_2 \in M$, on a $e_1 \cap e_2 = \emptyset$.

Les arêtes du couplage n'ont pas de sommets en commun.

Trouver le couplage maximum dans un graphe pondéré (et biparti)

Pour un graphe pondéré $G = (V, E)$ avec *poids* $w : E \to \mathbb{N}_0$ (qui est biparti), déterminer le couplage $M \subseteq E$ tel que

$$w(M) := \sum_{e \in M} w_e \quad \text{est maximum.}$$

w-couverture de sommets

Soit $G = (V, E)$ un graphe pondéré avec poids $w : E \to \mathbb{N}_0$. Une *w-couverture de sommets* est un vecteur $y \in \mathbb{N}_0^{|V|}$ tel que

$$\forall uv \in E : \quad y_u + y_v \geqslant w_{uv}.$$

La *valeur* d'une w-couverture de sommets y est $\sum_{v \in V} y_v$.

w-couverture de sommets $\geqslant$ poids d'un couplage

Lemme (Dualité faible)

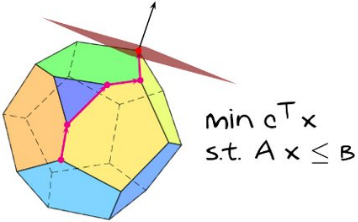
Soit $G = (V, E)$ un graphe pondéré avec poids $w : E \to \mathbb{N}_0$. Si M est un couplage de G et si y est une w-couverture de sommets de G, alors

$$w(M) \leqslant \sum_{v \in V} y_v.$$

L'affectation des tâches est optimale

Dualité forte pour graphes bipartis

- Visant une preuve par dualité
- Programmation linéaire en nombres entiers



Graphes non-bipartis

Visant une deuxième preuve de la dualité faible par dualité de PLs

Idée

Décrire les vecteurs *charactéristique* χ^M de couplages par des inégalités linéaires et une contrainte d'*intégralité*.

La description

Pour $v \in V$, on dénote l'ensembles d'arêtes *incidentes* à v par

$$\delta(v) = \{e \in E \colon v \in e\}.$$

L'ensemble $\{\chi^M \colon M \text{ matching of } G\}$ est l'ensemble des *solutions admissibles de*

$$\begin{aligned} v \in V\colon &\quad \textstyle\sum_{e \in \delta(v)} x_e \leqslant 1 \\ e \in E\colon &\quad x_e \in \{0,1\}. \end{aligned}$$

Programmation linéaire en nombres entiers

Programme linéaire en nombres entiers

Un problème d'optimisation sous forme

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ & Ax \leqslant b \\ & x \in \mathbb{Z}^{\mathbf{n}} \end{aligned}$$

est un *programme linéaire en nombres entiers* .

Programmation linéaire en nombres entiers

Programme linéaire en nombres entiers

Un problème d'optimisation sous forme

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ & Ax \leqslant b \\ & x \in \mathbb{Z}^{\mathbf{n}} \end{aligned}$$

est un *programme linéaire en nombres entiers* .

- La programmation linéaire en nombres entiers est NP-difficile. Sauf si $P = NP$, elle n'est pas résoluble en temps polynomial.
- Beaucoup de chercheurs pensent que $P \neq NP$.
- La question $P \neq NP$ est un des problèmes du *prix du millénaire* de l'*Institut de mathématiques Clay*. (prix d'un million $)

Un programme linéaire en nombres entiers pour trouver le couplage de poids maximum

$$\max \textstyle\sum_{e \in E} w_e \cdot x_e$$

$$\begin{array}{ll} v \in V: & \sum_{e \in \delta(v)} x_e \leqslant 1 \\ e \in E: & x_e \geqslant 0 \end{array}$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^{|\mathbf{E}|}.$$

Un programme linéaire en nombres entiers pour trouver le couplage de poids maximum

$$\max \textstyle\sum_{e \in E} w_e \cdot x_e$$

$$\begin{aligned} v \in V: &\quad \textstyle\sum_{e \in \delta(v)} x_e \leqslant 1 \\ e \in E: &\quad x_e \geqslant 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^{|\mathbf{E}|}.$$

Programme linéaire en nombres entiers

$$\max \textstyle\sum_{e \in E} w_e \cdot x_e$$

$$\begin{aligned} v \in V: &\quad \textstyle\sum_{e \in \delta(v)} x_e \leqslant 1 \\ e \in E: &\quad x_e \geqslant 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{|\mathbf{E}|}.$$

Relaxation en PL

Retour aux couplages: la matrice d'incidence

Soit $G = (V, E)$ un graphe et supposons que les sommets et arêtes sont ordonnés comme $v_1, \ldots, v_n$ et $e_1, \ldots, e_m$. La matrice $A^G \in \{0,1\}^{n \times m}$ avec

$$A^G_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } v_i \in e_i, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

est dit la *matrice d'incidence* (sommets-arêtes) de G.

La forme duale de la relaxation en PL

$$\begin{gathered}\max w^T x \\ A^G x \leqslant \mathbf{1} \\ x \geqslant 0\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\min \mathbf{1}^T y \\ \left(A^G\right)^T y \geqslant w \\ y \geqslant 0\end{gathered}$$

La forme duale de la relaxation en PL

$$\begin{gathered} \max w^T x \\ A^G x \leqslant \mathbf{1} \\ x \geqslant 0 \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \min \mathbf{1}^T y \\ \left(A^G\right)^T y \geqslant w \\ y \geqslant 0 \end{gathered}$$

$$\max \textstyle\sum_{e \in E} w_e \cdot x_e$$

$$\begin{aligned} v \in V: &\quad \textstyle\sum_{e \in \delta(v)} x_e \leqslant 1 \\ e \in E: &\quad x_e \geqslant 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{|\mathbf{E}|}.$$

La forme duale de la relaxation en PL

$$\max w^T x$$
$$A^G x \leqslant \mathbf{1}$$
$$x \geqslant 0$$

$$\min \mathbf{1}^T y$$
$$\left(A^G\right)^T y \geqslant w$$
$$y \geqslant 0$$

$$\max \textstyle\sum_{e \in E} w_e \cdot x_e$$

$$\begin{aligned} v \in V: &\quad \textstyle\sum_{e \in \delta(v)} x_e \leqslant 1 \\ e \in E: &\quad x_e \geqslant 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{|\mathbf{E}|}.$$

$$\min \textstyle\sum_{v \in V} y_v$$

$$\begin{aligned} uv \in E: &\quad y_u + y_v \geqslant w_{uv} \\ v \in V: &\quad y_v \geqslant 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{|\mathbf{V}|}.$$

La forme duale de la relaxation en PL

$$\max w^T x$$
$$A^G x \leqslant \mathbf{1}$$
$$x \geqslant 0$$

$$\min \mathbf{1}^T y$$
$$\left(A^G\right)^T y \geqslant w$$
$$y \geqslant 0$$

$$\max \textstyle\sum_{e \in E} w_e \cdot x_e$$

$$\begin{aligned} v \in V: &\quad \textstyle\sum_{e \in \delta(v)} x_e \leqslant 1 \\ e \in E: &\quad x_e \geqslant 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{|\mathbf{E}|}.$$

$$\min \textstyle\sum_{v \in V} y_v$$

$$\begin{aligned} uv \in E: &\quad y_u + y_v \geqslant w_{uv} \\ v \in V: &\quad y_v \geqslant 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{|\mathbf{V}|}.$$

Relaxation en PL du problème de w-couverture minimum de sommets !

Dualité forte : Idée de preuve

Couplage de poids maximum

$$OPT_{IP} \quad \leqslant \quad OPT_{LP}$$

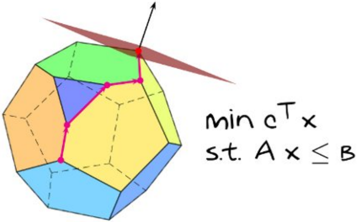
w-couverture minimum de sommets

$$OPT_{LP} \quad \leqslant \quad OPT_{IP}$$

Quiz

Dualité forte pour des graphes bipartis

- Des matrices totalement unimodulaires
- Démontrer la dualité forte en cas d'un graphe biparti



Des matrices totalement unimodulaires

Une matrice $A \in \{0, \pm 1\}$ est *totalement unimodulaire* (TUM), si le déterminant de chaque sous-matrice carrée de A vaut $0, \pm 1$.

Matrice d'incidence d'un graphe biparti

Théorème

Soit $G = (V, E)$ un graphe biparti. La matrice d'incidence A^G de G est totalement unimodulaire.

Matrice d'incidence d'un graphe biparti

Matrices TUM et PL en nombres entiers

Théorème

Si $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ est totalement unimodulaire et $b \in \mathbb{Z}^m$, alors chaque sommet du polyèdre $P = \{x \in \mathbb{R}^n\colon Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0\}$ est intègral.

Matrices TUM et PL en nombres entiers

Matrices TUM et PL en nombres entiers (cont.)

Corollaire

Si $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ est totalement unimodulaire, $b \in \mathbb{Z}^m$, et si $\max\{c^T x \colon x \in \mathbb{R}^n,\, Ax \leqslant b,\, x \geqslant 0\}$ est borné, alors

$$\max\{c^T x \colon x \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}},\, Ax \leqslant b,\, x \geqslant 0\} = \max\{c^T x \colon x \in \mathbb{Z}^{\mathbf{n}},\, Ax \leqslant b,\, x \geqslant 0$$

Dualité forte pour des graphes bipartis

Théorème (Egerváry 1931)

Soit $G = (V, E)$ un graphe biparti et pondéré avec poids $w : E \to \mathbb{N}_0$. Le poids maximum d'un couplage est égal à la valeur d'une w-couverture minimum de sommets.

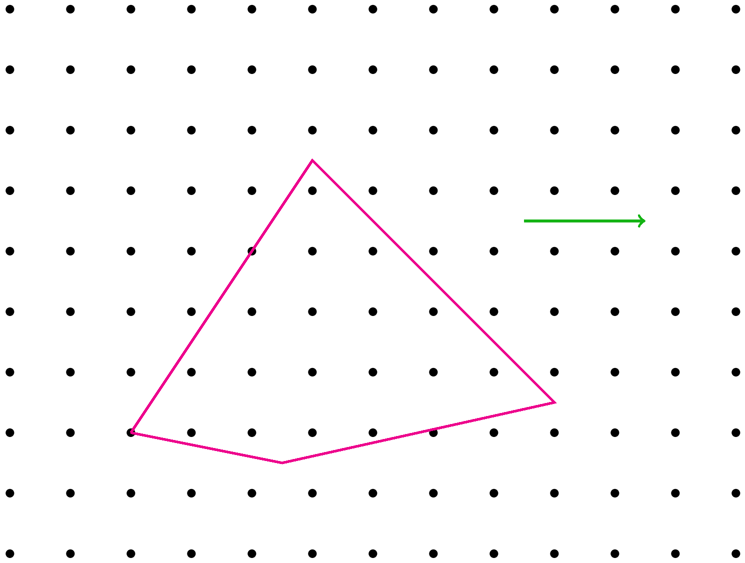
Théorème de König

Une *couverture de sommets* d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble $U \subseteq V$ tel que $e \cap U \neq \emptyset$ pour chaque $e \in E$.

Théorème (König 1931)

Soit $G = (V, E)$ un graphe biparti. La cardinalité maximum d'un couplage de G est égale à la cardinalité minimum d'une couverture de sommets de G.

Programmation linéaire en nombres entiers



Une formulation PLNE de w-couverture minimum de sommets

$$\min \sum_{v \in V} y_v$$

$$\begin{aligned} uv \in E: &\quad y_u + y_v \geqslant w_{uv} \\ v \in V: &\quad y_v \geqslant 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^{|\mathbf{V}|}.$$

Quiz

$$\min \sum_{v \in V} y_v$$

$$\begin{aligned} uv \in E\colon \quad & y_u + y_v \geqslant w_{uv} \\ v \in V\colon \quad & y_v \geqslant 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{|\mathbf{V}|}.$$

$$\min \sum_{v \in V} y_v$$

$$\begin{aligned} uv \in E\colon \quad & y_u + y_v \geqslant w_{uv} \\ v \in V\colon \quad & y_v \geqslant 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^{|\mathbf{V}|}.$$

Démontrer la dualité faible par dualité de PL

Théorème

Le poids maximum d'un couplage est au plus la valeur minimale d'une w-couverture de sommets.

$$\max \sum_{e \in E} w_e \cdot x_e \qquad \begin{aligned} v \in V\colon &\quad \sum_{e \in \delta(v)} x_e \leqslant 1 \\ e \in E\colon &\quad x_e \geqslant 0 \\ &\quad \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^{|\mathbf{E}|}. \end{aligned}$$

$$\max \sum_{e \in E} w_e \cdot x_e \qquad \begin{aligned} v \in V\colon &\quad \sum_{e \in \delta(v)} x_e \leqslant 1 \\ e \in E\colon &\quad x_e \geqslant 0 \\ &\quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{|\mathbf{E}|}. \end{aligned}$$

$$\min \sum_{v \in V} y_v \qquad \begin{aligned} uv \in E\colon &\quad y_u + y_v \geqslant w_{uv} \\ v \in V\colon &\quad y_v \geqslant 0 \\ &\quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{|\mathbf{V}|}. \end{aligned}$$

$$\min \sum_{v \in V} y_v \qquad \begin{aligned} uv \in E\colon &\quad y_u + y \\ v \in V\colon &\quad y_v \geqslant 0 \\ &\quad \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^{|} \end{aligned}$$

Démontrer la dualité faible par dualité de PL (cont.)

$$\max \sum_{e \in E} w_e \cdot x_e$$

$$\begin{aligned} v \in V: &\quad \sum_{e \in \delta(v)} x_e \leqslant 1 \\ e \in E: &\quad x_e \geqslant 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{|\mathbf{E}|}.$$

$$\min \sum_{v \in V} y_v$$

$$\begin{aligned} uv \in E: &\quad y_u + y_v \geqslant w_{uv} \\ v \in V: &\quad y_v \geqslant 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{|\mathbf{V}|}.$$

Démontrer la dualité faible par dualité de PL (cont.)

$$\max \sum_{e \in E} w_e \cdot x_e$$

$$\begin{aligned} v \in V: \quad & \sum_{e \in \delta(v)} x_e \leqslant 1 \\ e \in E: \quad & x_e \geqslant 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{|\mathbf{E}|}.$$

$$\min \sum_{v \in V} y_v$$

$$\begin{aligned} uv \in E: \quad & y_u + y_v \geqslant w_{uv} \\ v \in V: \quad & y_v \geqslant 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{|\mathbf{V}|}.$$

$$\max w^T x$$

$$\begin{aligned} Ax &\leqslant \mathbf{1} \\ x &\geqslant 0 \end{aligned}$$

$$\min \mathbf{1}^T y$$

$$\begin{aligned} A^T y &\geqslant w \\ y &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Démontrer la dualité faible par dualité de PL (cont.)

$$\max \sum_{e \in E} w_e \cdot x_e$$

$$\begin{aligned} v \in V: &\quad \sum_{e \in \delta(v)} x_e \leqslant 1 \\ e \in E: &\quad x_e \geqslant 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{|\mathbf{E}|}.$$

$$\min \sum_{v \in V} y_v$$

$$\begin{aligned} uv \in E: &\quad y_u + y_v \geqslant w_{uv} \\ v \in V: &\quad y_v \geqslant 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{|\mathbf{V}|}.$$

Démontrer la dualité faible par dualité de PL (cont.)

$$\max \sum_{e \in E} w_e \cdot x_e$$

$$\begin{aligned} v \in V: &\quad \sum_{e \in \delta(v)} x_e \leqslant 1 \\ e \in E: &\quad x_e \geqslant 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{|\mathbf{E}|}.$$

$$\min \sum_{v \in V} y_v$$

$$\begin{aligned} uv \in E: &\quad y_u + y_v \geqslant w_{uv} \\ v \in V: &\quad y_v \geqslant 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{|\mathbf{V}|}.$$

$$\max w^T x$$

$$\begin{aligned} A^G x &\leqslant \mathbf{1} \\ x &\geqslant 0 \end{aligned}$$

$$\min \mathbf{1}^T y$$

$$\begin{aligned} (A^G)^T y &\geqslant w \\ y &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Dualité faible par dualité de PL

Lemme (Dualité faible)

Soit $G = (V, E)$ un graphe pondéré avec poids $w : E \to \mathbb{N}_0$. Si M est un couplage de G et si y est une w-couverture de sommets de G, alors

$$w(M) \leqslant \sum_{v \in V} y_v.$$