

# CM 4

## La Méthode Du Simplexe (2)

Marcher sur les toits encore

Cours *Optimisation Discrète* 17 mars 2011

Friedrich Eisenbrand  
EPFL

66

Notes

## Algorithme du simplexe

### Brouillon d'algorithme

- i) Calcule le sommet  $x_B^*$  du toit  $B$
- ii) Trouve un index  $i \in \{1, \dots, m\} \setminus B$  tel que  $a_i x_B^* > b_i$ . Si un tel index n'existe pas,  $x_B^*$  est la solution optimale.
- iii) Détermine index  $j \in B$  tel que
  - a)  $B' = B \cup \{i\} \setminus \{j\}$  est un toit
  - b) Sommet  $x_{B'}^*$  de  $B'$  est admissible pour le PL défini par  $B$ .  
Si un tel index n'existe pas, le PL (6) est inadmissible.

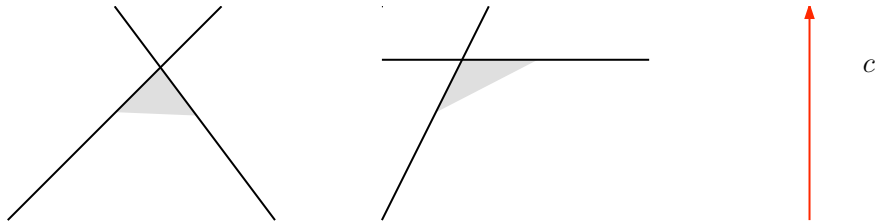
67

Notes

## Terminaison et dégénération

### Définition (Toit et PL dégénéré)

Un toit  $B$  du PL (6) est *dégénéré* si la solution optimale du PL (7) n'est pas unique. Un PL est dégénéré si le PL a un toit dégénéré.



**FIGURE:** Toit non-dégénéré et toit dégénéré

Notes

68

## Le cas non-dégénéré

### Théorème

*L'algorithme du simplexe termine si le PL (6) est non-dégénéré.*

Notes

69

## Implementer pas iii)

### Trouver un index qui sort le toit

- ▶ On considère les systèmes d'équations

$$\sum_{k \in B} a_k z_k = c^T \quad (21)$$

$$\sum_{k \in B} a_k y_k = -a_i \quad (22)$$

avec variables  $z_k, y_k$   $k \in B$ .

- ▶ Calcule la solution  $z^* \in \mathbb{R}^n$  de (21) et la solution  $y^* \in \mathbb{R}^n$  de (22)
- ▶ Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$  :

$$\sum_{k \in B} a_k (z_k^* + \lambda \cdot y_k^*) + a_i \cdot \lambda = c^T \quad (23)$$

- ▶ On cherche  $\lambda \geq 0$  maximal, tel que (23) est encore une combinaison conique de  $c$ .

70

Notes

## Implementer pas iii) cont.

- ▶ Calcule  $J = \{k \in B: y_k^* < 0\}$

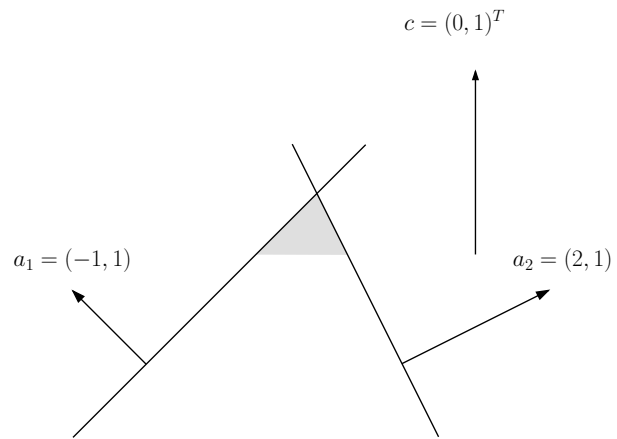
$$\lambda^* = \min_{k \in J} -\frac{z_k^*}{y_k^*}. \quad (24)$$

On choisit  $j \in J$  tel que le minimum est atteint.

- ▶  $j$  sort du toit
- ▶ Si  $J = \emptyset$ , on constate que le PL n'est pas admissible.

71

Notes



**FIGURE:** Le toit initial d'exemple suivant.

Notes

### Exemple

On considère

$$\max \left\{ x_2 : x \in \mathbb{R}^n, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Le toit initial est  $B = \{1, 2\}$

$x_B^*$  est la solution de

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (25)$$

alors  $x_B^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

La contrainte  $(1, 2)x \leq 1$  coupe  $x_B^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Alors 3 va entrer dans le toit  $B'$ .

On considère

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (26)$$

et on trouve

$$z^* = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Notes

On considère

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} y = - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (27)$$

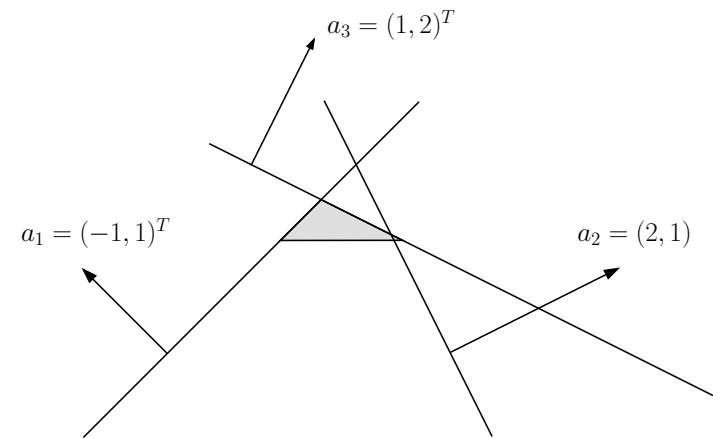
et on trouve

$$y^* = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$J = \{1, 2\}$  et le minimum dans (24) est atteint par  $j = 2$ . Alors  $B' = \{1, 3\}$ .

Notes

74



75

Notes

## Plus grand exemple

### Exemple en 3 variables

Nous allons résoudre le PL  $\max\{c^T x : x \in \mathbb{R}^3, Ax \leq b\}$  avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Notes

76

## Questions

### Questions principales

Est-ce que cette manière d'implémenter pas iii) est correcte ? En autres mots, est-ce que

- ▶  $B' = B \cup \{i\} \setminus \{j\}$  est un toit ?
- ▶ le sommet de  $B'$  est admissible pour le PL défini par  $B$  ?
- ▶ Si  $J = \emptyset$ , est-ce que le PL n'est pas admissible ?

Notes

77

## Affirmer l'inadmissibilité

### Lemme

L'ensemble des indexes  $B' = B \cup \{i\} \setminus \{j\}$  est un toit et  $x_{B'}^*$  est admissible pour le PL défini par  $B$ .

Si  $J = \emptyset$ , le PL est inadmissible.

### Proposition

Les demi-espaces  $a_k^T x \leq b(k)$ ,  $k \in B$  et  $a_i^T x \leq b(i)$  définissent un système d'inégalités inadmissible si et seulement si  $J = \emptyset$ .