

CM 3

La Méthode Du Simplexe

Marcher sur les toits

Cours *Optimisation Discrète* 10 mars 2011

Friedrich Eisenbrand
EPFL

38

Notes

Récapitulation

Lemme

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. L'élimination de Gauss-Jordan calcule une matrice $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ inversible et une matrice $A' \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sous la forme échelonnée en lignes tel que

$$U \cdot A = A'.$$

39

Notes

Retour à la programmation linéaire

Sans perte de généralité, les colonnes de A sont linéairement indépendantes. Pourquoi ? :

- ▶ Considérons le programme linéaire

$$\max\{c^T x : x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b\} \quad (4)$$

- ▶ Avec l'élimination de Gauss-Jordan, on calcule $U^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que $U^T \cdot A^T$ est sous la forme échelonnée en lignes
- ▶ $A \cdot U = [A' \mid 0]$ où les colonnes de $A' \in \mathbb{R}^{m \times n'}$ sont linéairement indépendantes et $0 \in \mathbb{R}^{m \times n''}$ est une matrice nulle et $n = n' + n''$
- ▶ On réécrit le programme linéaire

$$\max\{c^T x : Ax \leq b\} \quad \text{comme} \quad \max\{c^T \cdot U \cdot U^{-1} x : A \cdot U \cdot U^{-1} x \leq b\}$$

et on considère le programme linéaire

$$\max\{c'^T y : y \in \mathbb{R}^{n'}, A'y \leq b\} \quad (5)$$

où c'^T est formé par les n' premières composantes de $c^T U$.

40

Notes

Retour à la programmation linéaire

Théorème

Si $x \in \mathbb{R}^n$ est admissible pour (4), on obtient que $y' \in \mathbb{R}^{n'}$ est admissible pour (5), où y' est formé par les n' premières composantes de $U^{-1}x$. De plus, $c^T x = c'^T y'$ si les n'' dernières composantes de $c^T U$ sont zéro.

Si y' est admissible pour (5), $x = U \begin{pmatrix} y' \\ 0 \end{pmatrix}$ est admissible pour (4) et $c^T x = c'^T y'$.

Théorème

Si une des n'' dernières composantes de $c^T U$ est non-nulle et le PL (5) est admissible, alors le PL (4) est non-borné.

41

Notes

Retour à la programmation linéaire

PL original et sa transformée

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 \\ & 2x_1 + 1x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ & 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 6 \end{aligned}$$

Avec $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on trouve le programme linéaire

$$\begin{aligned} \max \quad & y_1 + y_2 \\ & 2y_1 + 1y_2 \leq 5 \\ & 1y_1 + 2y_2 \leq 6 \end{aligned}$$

Si $c^T = (1, 1, 3)$ est l'objectif dans le PL original, on obtient

$$c^T U = (1, 1, 3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1, 1, 1)$$

Comme la dernière composante de l'objectif est non-nulle, le programme linéaire original n'est pas borné.

42

Notes

Retour à la programmation linéaire

Exercice de 5 Min.

Un rayon est un ensemble $r(x^*, d) = \{x^* + \alpha \cdot d : \alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ où $x^*, d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq 0$.

Pour le deuxième cas de l'exemple, trouvez un rayon admissible qui n'est pas borné par rapport à la fonction objective.

43

Notes

Sans perte de généralité colonnes de A sont linéairement indépendantes

À l'aide de l'élimination de Gauss-Jordan

- ▶ Si on veut résoudre un PL (4) on calcule le PL (5) et on résout PL (5) au lieu de PL (4).
- ▶ Comme ça on a réduit le nombre de variables et les colonnes de la matrice sont linéairement indépendantes.

Conséquence

Désormais, on suppose que les colonnes de la matrice A d'un programme linéaire $\max\{c^T x : x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b\}$ sont *linéairement indépendantes*.

44

Notes

Trouver une solution optimale d'un PL

Tâche

Trouver une solution optimale du programme linéaire

$$\max\{c^T x : x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b\} \quad (6)$$

où $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de plein rang-colonne, $b \in \mathbb{R}^m$ et $c \in \mathbb{R}^n$.

45

Notes

Les Toits

Notation

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $i \in \{1, \dots, m\}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$

- ▶ a_i : $i^{\text{ème}}$ ligne de A
- ▶ a^j : $j^{\text{ème}}$ colonne de A
- ▶ $a_{i,j}$: l'élément de A qui est dans la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A

Définition (Toit)

Soit $B \subseteq \{1, \dots, m\}$ un sous-ensemble des indexes des lignes de A .
 B est un *toit* si

- $|B| = n$,
- les lignes a_i , $i \in B$ sont linéairement indépendantes, et
- le programme linéaire

$$\max\{c^T x : a_i^T x \leq b_i, i \in B\} \quad (7)$$

est borné.

Notes

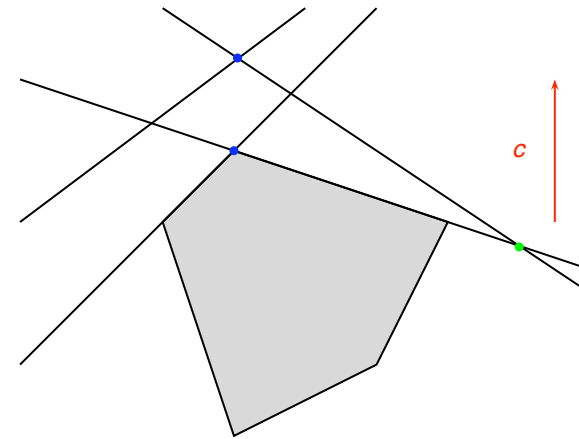


FIGURE: Les points bleus marquent des toits et le point vert marque un ensemble qui satisfait i) et ii) mais pas iii), alors ce n'est pas un toit.

Notes

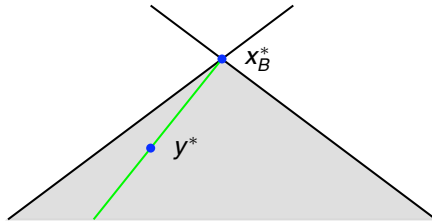
Quelle est la solution optimale d'un PL défini par un toit ?

Lemme

Soit $B \subseteq \{1, \dots, m\}$ un toit du PL (6) et soit x_B^* la solution unique du système

$$a_i^T x = b_i, i \in B,$$

alors x_B^* est une solution optimale du PL-toit (7).



48

Notes

Définition

La valeur d'un toit B est la valeur optimale $c^T x_B^*$ du PL-toit

$$\max\{c^T x : a_i^T x \leq b_i, i \in B\}.$$

Théorème (Dualité faible)

La valeur d'un toit est une borne supérieure des valeurs de la fonction objective sur les tous les points admissibles.

49

Notes

L'enveloppe linéaire, affine, conique et convexe

Soit $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble de vecteurs de dimension n . L'enveloppe linéaire, l'enveloppe affine, l'enveloppe conique et l'enveloppe convexe de X sont définies comme suit.

$$\text{lin.hull}(X) = \{\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_t \mathbf{x}_t : t \geq 1, \quad (8)$$

$$\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_t \in X, \lambda_1, \dots, \lambda_t \in \mathbb{R}\} \quad (9)$$

$$\text{affine.hull}(X) = \{\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_t \mathbf{x}_t : t \geq 1, \quad (10)$$

$$\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_t \in X, \sum_{i=1}^t \lambda_i = 1, \lambda_1, \dots, \lambda_t \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{cone}(X) = \{\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_t \mathbf{x}_t : t \geq 1, \quad (11)$$

$$\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_t \in X, \lambda_1, \dots, \lambda_t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$$

$$\text{conv}(X) = \{\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_t \mathbf{x}_t : t \geq 1, \quad (12)$$

$$\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_t \in X, \sum_{i=1}^t \lambda_i = 1, \lambda_1, \dots, \lambda_t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$$

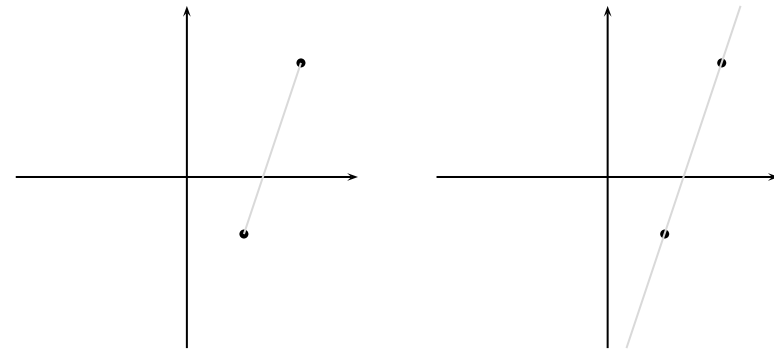


FIGURE: Deux points avec leur enveloppe convexe (à gauche) et leur enveloppe affine (à droite).

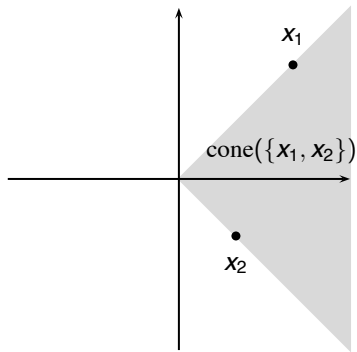


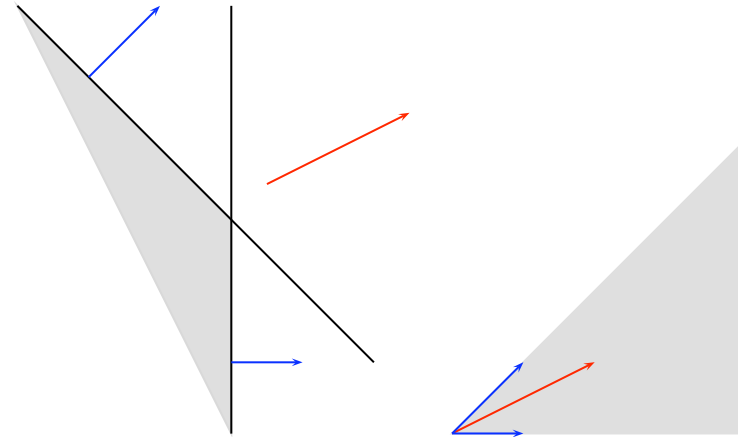
FIGURE: Deux points avec leur enveloppe conique.

Notes

Caractérisation des toits

Lemme

Soit $B \subseteq \{1, \dots, m\}$ un ensemble d'indices qui satisfait i) et ii), alors B est un toit si et seulement si $c \in \text{cone}\{a_i^T : i \in B\}$.



52

53

Notes

Caractérisation des toits

Exercice de 5 Min.

Trouver un toit et 3 lignes qui sont linéairement indépendantes, mais qui ne sont pas un toit du PL.

$$\max \left\{ x_1 + x_2 + x_3 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Notes

54

Sommets

Définition

Soit B un toit du PL (6). La solution x_B^* unique du système

$$a_i^T x = b_i, \quad i \in B, \quad (13)$$

est le *sommet* du toit.

Proposition

Soit B un toit du PL (6). Le sommet x_B^* de B est l'unique solution optimale du PL-toit (7) si et seulement si c est une combinaison conique des vecteurs a_k , $k \in B$ avec des facteurs strictement positifs.

Notes

55

Algorithme simplexe

Brouillon d'algorithme

- i) Calcule le sommet x_B^* du toit B
- ii) Trouve un index $i \in \{1, \dots, m\} \setminus B$ tel que $a_i x_B^* > b_i$. Si un tel index n'existe pas, x_B^* est la solution optimale.
- iii) Détermine index $j \in B$ tel que
 - a) $B' = B \cup \{i\} \setminus \{j\}$ est un toit
 - b) Sommet $x_{B'}^*$ de B' est admissible pour le PL défini par B .
Si un tel index n'existe pas, le PL (6) est inadmissible.

Notes

56

Terminaison et dégénération

Définition (Toit et PL dégénéré)

Un toit B du PL (6) est *dégénéré* si la solution optimale du PL (7) n'est pas unique. Un PL est dégénéré si le PL a un toit dégénéré.

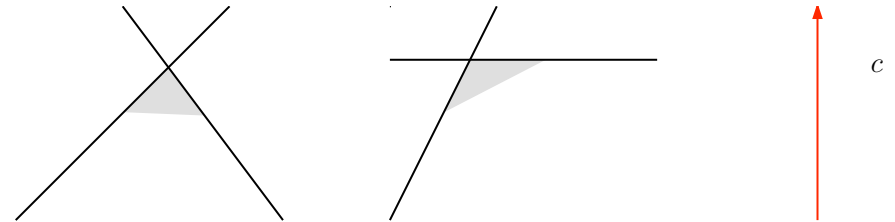


FIGURE: Toit non-dégénéré et toit dégénéré

Notes

57

Le cas non-dégénéré

Théorème

L'algorithme simplexe termine si le PL (6) est non-dégénéré.

Notes

58

Implementer pas iii)

Trouver un index qui sort le toit

- ▶ On considère les systèmes d'équations

$$\sum_{k \in B} a_k z_k = c^T \quad (14)$$

$$\sum_{k \in B} a_k y_k = -a_i \quad (15)$$

avec variables z_k, y_k $k \in B$.

- ▶ Calcule la solution $z^* \in \mathbb{R}^n$ de (21) et la solution $y^* \in \mathbb{R}^n$ de (22)
- ▶ Pour $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k \in B} a_k (z_k^* + \lambda \cdot y_k^*) + a_i \cdot \lambda = c^T \quad (16)$$

- ▶ On cherche $\lambda \geq 0$ maximal, tel que (23) est encore une combinaison conique de c .

Notes

59

Implementer pas iii) cont.

- Calcule $J = \{k \in B: y_k^* < 0\}$

$$\lambda^* = \min_{k \in J} -\frac{z_k^*}{y_k^*}. \quad (17)$$

On choisit $j \in J$ tel que le minimum est atteint.

- j sort du toit
- Si $J = \emptyset$, on constate que le PL n'est pas admissible.

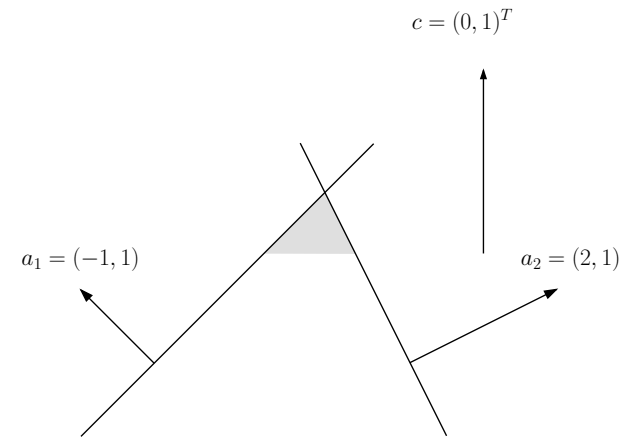


FIGURE: Le toit initial d'exemple suivant.

Exemple

On considère

$$\max \left\{ x_2 : x \in \mathbb{R}^n, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Le toit initial est $B = \{1, 2\}$

x_B^* est la solution de

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

alors $x_B^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La contrainte $(1, 2)x \leq 1$ coupe $x_B^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors 3 va entrer dans le toit B' .

On considère

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

et on trouve

$$z^* = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

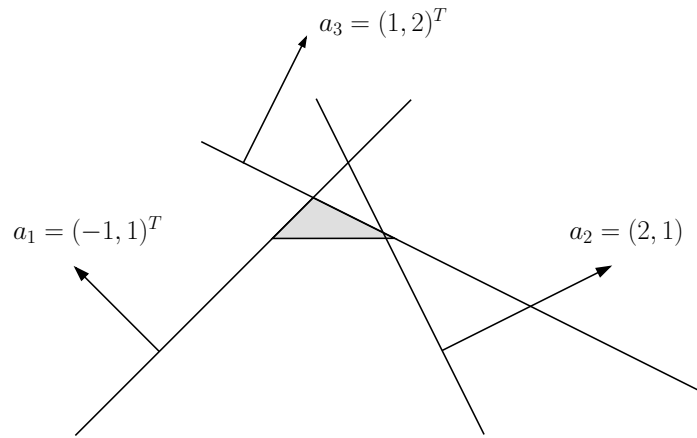
On considère

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} y = - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (20)$$

et on trouve

$$y^* = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$J = \{1, 2\}$ et le minimum dans (24) est atteint par $j = 2$. Alors $B' = \{1, 3\}$.



64

Notes

Questions

Questions principales

Est-ce que cette manière d'implémenter pas iii) est correcte ? En autres mots, est-ce que

- ▶ $B' = B \cup \{i\} \setminus \{j\}$ est un toit ?
- ▶ le sommet de B' est admissible pour le PL défini par B ?
- ▶ Si $J = \emptyset$, est-ce que le PL n'est pas admissible ?

65

Notes