Lineare Algebra

Übungsblatt 12 **4. Dezember 2013**

Allgemeine Hinweise:
Lösungen zu der mit einem Stern markierten Aufgabe können in Zweiergruppen bis **Mittwoch, 11. Dezember um 16 Uhr** durch Einwurf in der Box vor Büro MA B1 533 abgegeben werden.

Zusätzlich zu den Übungen ist es empfehlenswert, jede Woche die Aufgaben mit ungerader Nummer im aktuell behandelten Kapitel des Lehrbuchs zu machen. Lösungen hierzu finden sich am Ende des Buches.

Aufgabe 1

(i) Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix mit linear abhängigen Spalten. Dann gilt $\ker(A^TA) \supsetneq \{0\}$, d.h. der Kern von A^TA enthält einen von 0 verschiedenen Vektor.

(ii) Geben Sie eine orthogonale Basis für den Spann der folgenden Vektoren an.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

(iii) Bestimmen Sie eine orthogonale Basis des Spaltenraums der folgenden Matrix.

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 & 6 \\ 3 & -8 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

(iv) Berechnen Sie eine QR-Zerlegung der Matrix aus Teil (iii).

(v) Finden Sie eine QR-Zerlegung der folgenden Matrix.

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 7 \\ 2 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 $(*)$

(i) Seien
$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 13 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$
Finden Sie die beste Näherung $\hat{\boldsymbol{y}}$ in dem von $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ erzeugten Unterraum und geben Sie deren Distanz zu $\boldsymbol{y}$ an.

(ii) Bestimmen Sie für
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$
alle Lösungen des kleinste Quadrate Problems $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Geben Sie auch den Fehler an.

(iii) Bestimmen Sie für
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$
alle Lösungen des kleinste Quadrate Problems $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Geben Sie auch den Fehler an.

(iv) Beschreiben Sie *alle* Lösungen des kleinste Quadrate Problems für das System
$$x + y = 2$$
$$x + y = 4$$
Erklären Sie Ihre Antwort und fertigen Sie eine Skizze an.

(v) Bestimmen Sie für
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. eine QR-Zerlegung von A
2. alle Lösungen des kleinste Quadrate Problems $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Geben Sie auch den Fehler an.

Aufgabe 3

(i) Zeigen Sie, dass die Spalten einer $m \times n$ Matrix A linear unabhängig sind genau dann, wenn $A^T A$ invertierbar ist.

(ii) Bestimmen Sie die Gerade, die die folgenden Punkte am besten approximiert, d.h. so dass die Summe der Quadrate der vertikalen Abstände der Punkte zur Geraden minimiert wird.

$$(2,1), \quad (5,2), \quad (7,3), \quad (8,3)$$

Hinweis: Stellen Sie ein entsprechendes kleinste Quadrate Problem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ auf und fertigen Sie eine Skizze an.

Wahr/Falsch

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind und begründen Sie Ihre Antwort.

Kapitel 6.4 und 6.5

(i) Wenn $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ eine orthogonale Basis von W ist, dann ist $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, c\boldsymbol{v_3}$ für $c \in \mathbb{R}$ eine orthogonale Basis.

(ii) Für einen Unterraum W und $\boldsymbol{x} \in W^\perp$ gilt $\text{proj}_W(\boldsymbol{x}) = 0$.

(iii) Die Lösung des kleinste Quadrate Problems $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist der Punkt im Spaltenraum von A, der den kleinsten Abstand zu $\mathbf{b}$ hat.

(iv) Die Lösung des kleinste Quadrate Problems $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist $\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}$.

(v) Wenn die Spalten von A linear unabhängig sind, dann hat das kleinste Quadrate Problem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ eine eindeutige Lösung.

(vi) Wenn $A = QR$ eine QR-Zerlegung von A ist, dann ist die Lösung des kleinste Quadrate Problems $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gerade $\hat{\mathbf{x}} = R^{-1} Q^T \mathbf{b}$.